Rappel de Première. Fiche de révision

Suites numériques

Mémo — l'essentiel de Première

Propriété (suite arithmétique)

$u_{n+1} = u_n + r$ pour tout n.

- $u_n = u_0 + nr$, et plus généralement $u_n = u_p + (n-p)r$.
- Sens de variation : croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.
- $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Propriété (suite géométrique)

$u_{n+1} = q\,u_n$ pour tout n.

- $u_n = u_0 q^n$, et plus généralement $u_n = u_p q^{n-p}$.
- Somme : $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$.
- Si $u_0 > 0$: croissante si $q > 1$, décroissante si $0 < q < 1$.

Méthode — du calcul de $u_{n+1} - u_n$ au sens de variation

Pour étudier le sens de variation d'une suite : calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe ; si tous les termes sont strictement positifs, on peut aussi comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Partie A ⋆ — QCM

Exercice 1 ⋆

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Justifier brièvement.

i. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_3 = -7$ et $u_8 = 23$. Alors u_{11} est égal à :
a. 41 **b.** 39 **c.** 37

ii. (v_n) est une suite géométrique telle que $v_7 = -4374$ et $v_4 = 162$. Alors la raison q est égale à :
a. 3 **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** -3

iii. (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (2n-1)^2 - 4(1+n)^2$. Alors (u_n) est :
a. géométrique **b.** arithmétique **c.** constante

Exercice 2 ⋆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$, ainsi que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$. Alors la suite (v_n) est :
a. géométrique de raison 3 **b.** géométrique de raison $\frac{1}{3}$ **c.** géométrique de raison -3

Exercice 3 ⋆

Pour la suite (u_n) de l'exercice 2, on a :

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$ **c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Partie B ⋆⋆ — Suites auxiliaires

Exercice 4 ⋆⋆

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

a. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).

b. Soit (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   i. Démontrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme v_0.

   ii. Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire u_n en fonction de n.

c. Déterminer le sens de variation de (u_n) et confirmer la conjecture du a.

Exercice 5 ⋆⋆

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{n\,u_n + 4}{n+1}$.

a. Calculer u_2 et u_3.

b. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = n\,u_n$ est arithmétique ; préciser son premier terme et sa raison.

c. En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

d. En déduire le sens de variation de (u_n) et conjecturer sa limite.

Exercice 6 ⋆⋆

Soit (u_n) définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 4$, et (w_n) définie par $w_n = u_n - 10$.

a. Démontrer que (w_n) est géométrique ; préciser sa raison et w_0.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

c. Déterminer le sens de variation de (u_n), puis sa limite.

Partie C ⋆⋆ — Sommes et modélisation

Exercice 7 ⋆⋆

Calculer les sommes suivantes.

a. $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 200$

b. $T = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{10}}$

c. $U = 3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \times 2^9$

Exercice 8 ⋆⋆

Un capital de 2 000 € est placé au taux annuel de 3 %. On note C_n le capital après n années.

a. Justifier que (C_n) est géométrique ; préciser sa raison.

b. Exprimer C_n en fonction de n et calculer C_{10} (arrondi à l'euro).
c. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'années le capital dépasse 3 000 €.

Partie D ⋆⋆⋆ — Algorithmique et Python

Exercice 9 ⋆⋆⋆

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75\,u_n + 5$.

a. Recopier et compléter la fonction `terme(n)` ci-dessous pour qu'elle renvoie la valeur de u_n.

```
def terme(n):
  u = ......
  for k in range(......):
    u = ............
  return u
```

b. Que renvoie `terme(0)` ? `terme(3)` (arrondi à 10^{-3}) ?
c. Écrire une fonction `seuil(S)` renvoyant le plus petit entier n tel que $u_n > S$.
d. On admet que $u_n = 20 - 18 \times 0{,}75^n$. Déterminer par le calcul la valeur renvoyée par `seuil(19.9)` et vérifier la cohérence avec le programme.
e. Écrire une fonction `somme(n)` renvoyant $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
f. Expliquer pourquoi la boucle de la fonction `seuil` s'arrête pour toute valeur de S strictement inférieure à 20, mais *ne s'arrête jamais* si $S \geqslant 20$.