Chapitre 1. Sujets du Bac

Suites numériques

Exercice A — Bac Amérique du Nord, 20 mai 2026, sujet 1, exercice 2 (partie A) ⋆⋆

Exercice A ⋆⋆ · modèle discret

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie un modèle d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1er janvier 2025.

Partie A : étude d'un modèle discret. On modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n). Pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1er janvier de l'année $2025+n$. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n}$. On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier, pour tout entier n, $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donné par ce modèle.
2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = 4 - \dfrac{4}{x}$.
   a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   d. Justifier que $\ell = 2$.
   e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?
3. On considère le script Python ci-contre.
   a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2;4[$. Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.
   b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def population(s) :
  u = 4
  n = 0
  while ...  :
    u = ...
    n = ...
  return n
```

Exercice B — Bac Asie, 12 juin 2025, sujet 2, exercice 2 ⋆⋆

Exercice B ⋆⋆ · suites couplées et Python

Partie A. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier la réponse.

Partie B. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_0 = 45$ et $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7$.

1. Montrer que $w_1 = 44{,}5$.
2. On souhaite écrire une fonction `suite` en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-contre une proposition pour cette fonction. L'exécution de `suite(1)` ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction `suite` afin que l'exécution de `suite(n)` renvoie la valeur du terme w_n ?

```
def suite(n):
  U = 30
  W = 45
  for i in range(1, n+1):
    U = U / 2 + 10
    W = W / 2 + U / 2 + 7
  return W
```

3. a. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n : $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$.

   b. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a $0 \leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}$. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

Exercice C — Bac Centres étrangers, 13 juin 2025, sujet 2, exercice 1 ⋆⋆⋆

Exercice C ⋆⋆⋆ · comparaison de deux modèles

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B. Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A. Dans le milieu A, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93. Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B. Dans le milieu B, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n$; v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
5. a. Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, puis en déduire la valeur de ℓ.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C. Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
   a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while ...  :
  u = ...
  v = ...
  n = n + 1
print(2025 + n)
```