Chapitre 1. Cours

Suites numériques, limites et récurrence

I. Raisonnement par récurrence

A — Une idée simple

Le principe de récurrence peut être illustré par l'exemple suivant.

si l'on peut d'abord se placer sur un barreau d'une échelle, et si l'on peut passer d'un barreau quelconque à son suivant	**alors**	on peut gravir tous les autres barreaux de cette échelle.

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n. Par exemple, la somme des entiers de 1 à n est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (à vérifier pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3\ldots$). Et même si l'on vérifiait cette propriété jusqu'à $n = 1000$, cela ne démontrerait pas qu'elle est vraie pour *tout* n. Pour y parvenir, on utilise un raisonnement appelé **raisonnement par récurrence**.

B — Le principe de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Définition

Une propriété est dite **héréditaire** si, lorsqu'elle est vraie pour un entier p, elle est alors vraie aussi pour l'entier $p+1$.

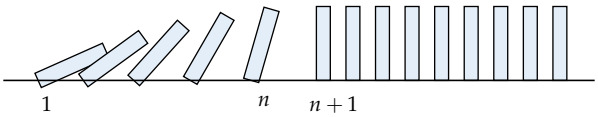
Propriété (axiome de récurrence)

Si une propriété $P(n)$ est vraie pour n_0 et si elle est héréditaire à partir du rang n_0, alors, pour tout $n \geqslant n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie.

Méthode — une démonstration par récurrence comporte trois étapes

- ✓ **Première étape : *initialisation.*** Il s'agit de vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
- ✓ **Deuxième étape : *hérédité.*** On suppose qu'il existe un entier k tel que $P(k)$ soit vraie (c'est ce qu'on appelle l'*hypothèse de récurrence*) et on démontre alors que $P(k+1)$ est aussi vraie.
- ✓ **Troisième étape : *conclusion.***

Voici une illustration visuelle du raisonnement par récurrence : *étape 1*, on montre que le premier domino tombe ; *étape 2*, on montre que la chute du domino n entraîne celle du domino $n+1$; *étape 3*, on en déduit que tous les dominos tombent.



C — Un exemple pour comprendre

Exemple

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.

Solution. On désigne par P la propriété : « $u_n = 2^n - 1$ ».
✓ **Initialisation.** On a $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $2^0 - 1 = u_0$: P est vraie pour $n = 0$.
✓ **Hérédité.** Soit k un entier naturel tel que $u_k = 2^k - 1$ *(hypothèse de récurrence)*. Montrons que l'on a aussi $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. Or, par définition :

$$u_{k+1} = 2u_k + 1 = 2\left(2^k - 1\right) + 1 \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \quad = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

La propriété est donc héréditaire.
✓ **Conclusion.** La propriété P est vraie pour $n = 0$ et, comme elle est héréditaire, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$. C'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$. **CQFD.**

Remarque

- Le raisonnement par récurrence est souvent utilisé pour démontrer une propriété sur les entiers lorsqu'une démonstration directe est difficile.
- La propriété P peut être une égalité, une inégalité, ou une propriété exprimée par une phrase (divisibilité, encadrement, monotonie…).
- L'initialisation est une étape **très importante** : une propriété peut être héréditaire sans pour autant être vraie. Ainsi, « 2^n est divisible par 5 » est héréditaire (si $2^k = 5m$, alors $2^{k+1} = 10m$) mais elle est fausse pour tout n.

Exercice A application

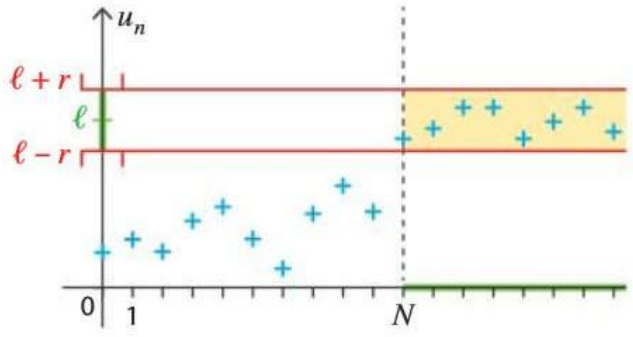
1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
   a. $2^n \geqslant n + 1$;
   b. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$;
   c. pour tout $a > 0$, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.
2. u est la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
   a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $0 < u_n < 3$.
   b. Démontrer par récurrence que la suite u est croissante.

II. Limite finie ou infinie d'une suite

1. Suites de limite finie

Définition (suite convergente)

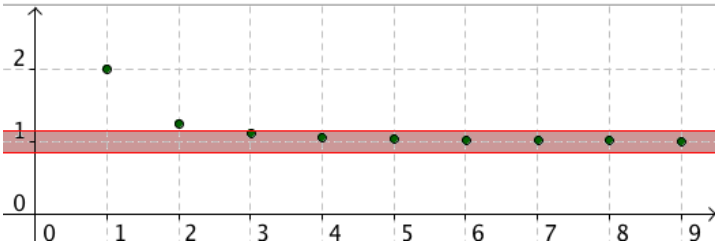
On dit qu'une suite (u_n) **converge vers** ℓ si tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On note alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Une suite non convergente est dite **divergente**.



À partir du rang N, tous les termes sont dans la bande $]\ell - r\,;\ell + r[$.

Exemple

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ a pour limite 1 : les termes se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang. Si l'on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1 (par exemple $]0{,}9999\,;1{,}0001[$), tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Exemple (à connaître) — la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0

Soit $I =]-a\,;a[$ un intervalle ouvert contenant 0, où a est un réel strictement positif (aussi petit que l'on veut). Pour $n \geqslant 1$:

$$u_n \in I \iff -a < \frac{1}{n} < a \iff \frac{1}{n} < a \ \left(\text{car } \tfrac{1}{n} > 0\right) \iff n > \frac{1}{a}.$$

On note n_0 le plus petit entier naturel strictement supérieur à $\dfrac{1}{a}$. Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]-a\,;a[$: tout intervalle ouvert contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

2. Suites de limite infinie

Définition

Le nombre a désigne un réel strictement positif.

i. Dire que la suite (u_n) **diverge vers** $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

ii. Dire que la suite (u_n) **diverge vers** $-\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $]-\infty\,;-a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Méthode — algorithme de seuil

Déterminer le rang à partir duquel les termes d'une suite croissante de limite infinie dépassent un réel A. Exemple avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4u_n$.

En langage naturel

Entrée : saisir A (valeur de seuil)
Initialisation : n prend la valeur 0 ; u prend la valeur 2
Traitement : tant que $u < A$ faire
  n prend la valeur $n+1$
  u prend la valeur $4u$
Fin tant que — Sortie : afficher n

```
def seuil(A):
  u = 2
  n = 0
  while u < A:
    n = n + 1
    u = 4*u
  return n
```

Pour $A = 100$ l'algorithme renvoie 4 : c'est à partir de $u_4 = 512$ que les termes dépassent 100.

3. Limites des suites usuelles

Théorème 1

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

et pour tout entier $k \geqslant 1$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$

Démonstration de $\lim \sqrt{n} = +\infty$

Soit a un réel quelconque. Il y a deux cas de figure.

- Si $a \leqslant 0$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sqrt{n} \geqslant 1 > a$: on pose $N = 1$.
- Si $a > 0$, alors pour tout $n > a^2$ on a $\sqrt{n} > a$ (car la fonction racine carrée est croissante). Soit N le plus petit entier tel que $N > a^2$: pour tout $n \geqslant N$, $\sqrt{n} > a$.

Dans les deux cas, tout intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Exercice B application

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 2n^2 + 5$.

1. Démontrer que (u_n) est croissante et que sa limite est $+\infty$.
2. Compléter un algorithme donnant le rang à partir duquel les termes de (u_n) dépassent un seuil A.

III. Limites et opérations algébriques

Les limites d'une somme, d'un produit ou d'un quotient s'obtiennent par les tableaux suivants, où ℓ et ℓ' désignent des réels.

Somme.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Produit.

$\lim u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\pm\infty$	0
$\lim v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (u_n \times v_n)$	$\ell\,\ell'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$\pm\infty$	**F.I.**

Pour les cas infinis, le signe se détermine par la règle des signes.

Quotient.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	**F.I.**	**F.I.**

Le cas $\ell \neq 0$ divisé par 0 donne $\pm\infty$, le signe dépendant de celui du dénominateur au voisinage considéré.

Attention

Les quatre formes indéterminées à retenir : $\boxed{+\infty - \infty}$ $\boxed{0 \times \infty}$ $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}}$

Méthode — lever une indétermination

- **Polynôme ou quotient de polynômes** : factoriser par le terme de plus haut degré, au numérateur comme au dénominateur.
- **Différence de racines carrées** : multiplier par la quantité conjuguée.
- **Puissances** : factoriser par la puissance dominante (q^n de plus grand $|q|$).

Exemple

$n - 3\sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - 3\right) \longrightarrow +\infty.$

$\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \dfrac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}} \longrightarrow \dfrac{5}{4}.$

$\dfrac{3n^2+n}{n+3} = n \times \dfrac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \longrightarrow +\infty.$

$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \longrightarrow 0.$

IV. D'autres théorèmes

1. Théorème de comparaison

Théorème

Soit u et v deux suites.

- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

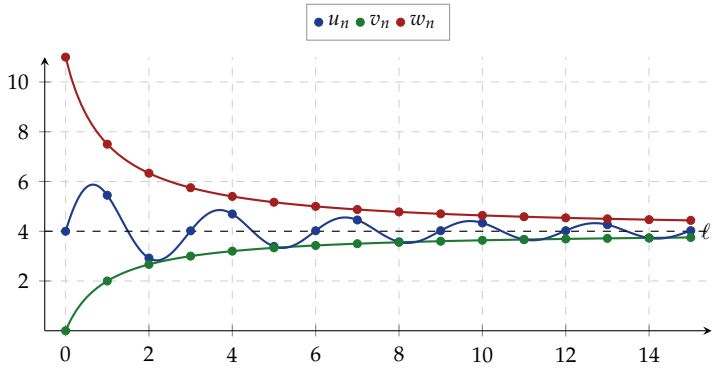
Démonstration (ROC)

Supposons $u_n \geqslant v_n$ pour tout $n \geqslant n_1$ et $\lim v_n = +\infty$. Soit a un réel. Par définition de la limite infinie, il existe un rang N_1 tel que, pour tout $n \geqslant N_1$, $v_n > a$. Posons $N = \max(N_1, n_1)$: pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant v_n > a$. Ainsi tout intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de (u_n) à partir du rang N, c'est-à-dire $\lim u_n = +\infty$. Le second point se démontre de la même manière.

2. Théorème des gendarmes (admis)

Théorème

Soit (v_n) et (w_n) deux suites convergentes vers le **même** nombre réel ℓ. Si (u_n) est une suite telle que, à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.



(v_n) et (w_n) encadrent (u_n) et convergent vers la même limite ℓ.

Exercice C application

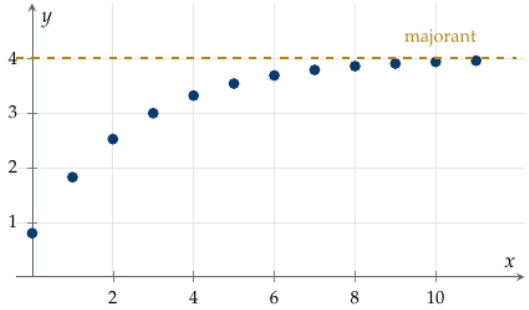
Étudier la convergence des suites définies pour tout $n \geqslant 1$ par :

a. $u_n = n + \sqrt{2n^2+3n+1}$ b. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{n+5}$ c. $u_n = \dfrac{6n+\sin n}{2n+1}$

3. Convergence des suites monotones

Théorème (admis)

Une suite croissante et majorée est convergente. Une suite décroissante et minorée est convergente.



Croissante et majorée : la convergence est forcée — mais la limite n'est pas le majorant.

Remarque

Cette propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle **ne donne pas** sa limite. D'après les propriétés sur les limites, si une suite est majorée par M, sa limite est obligatoirement inférieure ou égale à M.

Propriété (corollaire)

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Exercice D application

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

a. Démontrer que (u_n) est croissante.

b. Démontrer que (u_n) est majorée par 4.

c. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

V. Limite d'une suite géométrique

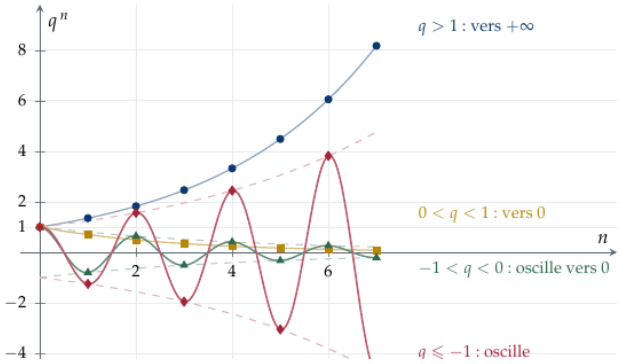
Théorème

q est un nombre réel. La suite (q^n) des puissances de q vérifie :

✓ si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$;

✓ si $-1 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0 ;

✓ si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) n'admet pas de limite.



Comportement de q^n selon q : nuages de points et allures.

Démonstration (cas $q > 1$)

On pose $q = 1 + a$ avec $a > 0$. *Inégalité de Bernoulli* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. En effet, au rang 0 on a $1 \geqslant 1$; et si $(1+a)^k \geqslant 1 + ka$, alors $(1+a)^{k+1} \geqslant (1+ka)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2 \geqslant 1 + (k+1)a$. Comme $a > 0$, $\lim(1 + na) = +\infty$; par comparaison, $\lim q^n = +\infty$.

Propriété (somme des termes)

Pour $q \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Si $-1 < q < 1$, cette somme converge vers $\dfrac{1}{1-q}$.

Exercice E application

1. Étudier la convergence des suites définies par :

   a. $u_n = \dfrac{3}{4^n}$ b. $v_n = -4\left(\sqrt{3}\right)^n$ c. $w_n = \dfrac{(-5)^n}{8}$ d. $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$

2. Déterminer la limite de la suite définie par $v_n = 5^n - 7^n$ pour tout entier naturel n.

VI. Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite est dite **arithmético-géométrique** lorsque $u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Méthode — forme explicite et limite

1. Résoudre l'équation de point fixe $\ell = a\ell + b$: on obtient $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
2. Poser $v_n = u_n - \ell$: alors $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - (a\ell + b) = a\,(u_n - \ell) = a\,v_n$, donc (v_n) est **géométrique** de raison a.
3. En déduire $v_n = v_0\,a^n$, puis $u_n = \ell + (u_0 - \ell)\,a^n$.
4. Conclure : si $-1 < a < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple

$u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 3$. Point fixe : $\ell = 0{,}8\ell + 3 \iff \ell = 15$. La suite $v_n = u_n - 15$ est géométrique de raison 0,8 avec $v_0 = -5$, donc $u_n = 15 - 5 \times 0{,}8^n$. Comme $0 < 0{,}8 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 15$.

MÉTHODES

Méthode 1 — Démontrer par récurrence

1. Énoncer $P(n)$ explicitement, avec le rang de départ.
2. Initialiser : vérifier $P(n_0)$ par le calcul.
3. Supposer $P(n)$ vraie pour un n fixé, écrire ce que cela signifie.
4. Partir de cette hypothèse et aboutir à $P(n+1)$.
5. Conclure par le principe de récurrence.

Astuce. Écrivez d'abord ce que vous voulez obtenir — l'expression de $P(n+1)$ — puis partez de l'hypothèse et rejoignez-la. Cela évite de tourner en rond.

Méthode 2 — Lever une forme indéterminée

1. Identifier la forme indéterminée en calculant séparément les limites des morceaux.
2. Transformer l'écriture : factoriser par le terme dominant, réduire au même dénominateur, ou multiplier par la quantité conjuguée.
3. Chaque transformation est une égalité valable pour tout n : le symbole lim se reporte donc d'une ligne à l'autre.
4. Conclure par les opérations sur les limites, une fois l'indétermination levée.

Attention — erreur de rédaction

Écrire une suite d'expressions sans le symbole lim devant chacune, puis conclure. Tant que l'indétermination n'est pas levée, c'est la *limite* que l'on transforme, pas un nombre : le symbole doit figurer à chaque étape.

Les quatre formes, une par une

Exemple — forme $\infty - \infty$

Soit $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$. Chaque terme tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) && \text{forme } \infty - \infty \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} && \text{quantité conjuguée} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} && \text{on factorise par } n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} && \text{simplification}
\end{aligned}$$

Exemple — forme $0 \times \infty$

Soit $u_n = \dfrac{1}{n}(3n+2)$: le premier facteur tend vers 0, le second vers $+\infty$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3.$$

On écrit le produit comme un quotient, puis on distribue.

Exemple — formes $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

$\dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \dfrac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}} \longrightarrow \dfrac{5}{4}$ (on factorise par n^2 en haut et en bas).

Pour $u_n = \dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n}}$: on réduit le numérateur au même dénominateur, puis

$$u_n = \frac{\frac{n-1}{n^2}}{\frac{3}{n}} = \frac{n-1}{n^2}\times\frac{n}{3} = \frac{n-1}{3n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{3} \longrightarrow \frac{1}{3}.$$

Remarque — ce qu'il faut retenir

Les quatre traitements sont **trois gestes** : *factoriser* par le terme dominant, *réduire* au même dénominateur, *multiplier* par la quantité conjuguée. Le troisième ne sert qu'aux différences de racines.

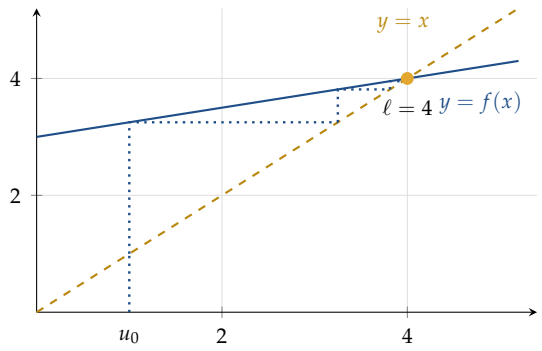
Méthode 3 — Utiliser un théorème de comparaison

1. Repérer le terme dont on ne sait rien — souvent $(-1)^n$, $\sin n$ ou $\cos n$.
2. L'encadrer : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
3. Transformer l'encadrement jusqu'à faire apparaître u_n au centre.
4. Choisir le bon théorème : comparaison pour $\pm\infty$, gendarmes pour une limite finie.

Erreur à éviter. Multiplier un encadrement par un facteur négatif sans inverser les inégalités.

Méthode 4 — Étudier une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Conjecturer encadrement et monotonie sur les premiers termes.
2. Démontrer l'encadrement par récurrence : la suite reste dans un intervalle stable.
3. Démontrer la monotonie, par récurrence ou par le signe de $u_{n+1} - u_n$.
4. Conclure à la convergence par le théorème de la limite monotone.
5. Déterminer la limite en résolvant $f(\ell) = \ell$, et choisir la racine compatible avec l'encadrement.



Suite $u_{n+1} = 0{,}25\,u_n + 3$: convergence en escalier vers le point fixe $\ell = 4$.

Attention

Résoudre $f(\ell) = \ell$ avant d'avoir prouvé la convergence. Cette équation donne les *candidats*, jamais l'existence de la limite.

Méthode 5 — Déterminer un seuil

1. Écrire l'inéquation sous la forme $q^n > s$ ou $q^n < s$.
2. Appliquer le logarithme aux deux membres, strictement positifs (logarithme : voir chapitre 8).
3. Descendre l'exposant, puis diviser par $\ln q$ **en changeant le sens** si $0 < q < 1$.
4. Conclure par le plus petit entier convenable, et vérifier sur n et $n-1$.

Bon réflexe. L'algorithme de seuil et le calcul par logarithme doivent donner le même entier. Quand les deux sont demandés, c'est une vérification gratuite.

Méthode 6 — Étudier une suite arithmético-géométrique

Quand ? La suite vérifie $u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $a \neq 1$. Elle n'est ni arithmétique ni géométrique, et l'énoncé introduit une suite auxiliaire.

1. Déterminer le point fixe ℓ en résolvant $\ell = a\ell + b$.
2. Poser $v_n = u_n - \ell$ — c'est ce que l'énoncé fait dire.
3. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison a.
4. En déduire $v_n = v_0 a^n$, puis $u_n = v_0 a^n + \ell$.
5. Conclure sur la limite selon la position de $|a|$ par rapport à 1.

Astuce. La constante à retrancher est toujours le point fixe. Si l'énoncé propose $v_n = u_n - 3$, c'est que 3 vérifie $3 = 3a + b$: vous pouvez le contrôler en une ligne avant de vous lancer.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Erreur	Bon réflexe
Omettre l'initialisation	Sans premier domino, rien ne tombe
Ne pas signaler l'usage de l'hypothèse de récurrence	Le correcteur doit pouvoir pointer la ligne
Écrire $\lim u_n = \infty$ sans signe	Préciser $+\infty$ ou $-\infty$
Croire qu'une forme indéterminée signifie « pas de limite »	Elle signifie « réécrire l'expression »
Conclure $\lim q^n = 0$ pour $q = -1{,}5$	Pour $q \leqslant -1$, la suite n'a pas de limite
Confondre majorant et limite	Une suite majorée par 10 peut converger vers 1
Résoudre $\ell = f(\ell)$ sans prouver la convergence	Étape 4 de la méthode 4, jamais seule
Croire qu'une suite croissante tend toujours vers $+\infty$	Seulement si elle n'est pas majorée

Module Python — seuil, somme et convergence numérique

```
def seuil(u0, q, cible):
  # plus petit n tel que u0 * q**n < cible, avec 0 < q < 1
  u = u0
  n = 0
  while u >= cible:
    u = u * q
    n = n + 1
  return n
def somme_geometrique(q, n):
  s = 0 ; t = 1
  for k in range(n + 1):
    s = s + t
    t = t * q
  return s
def suite_recurrente(u0, n):
  # affiche les n premiers termes de u(k+1) = (u(k) + 2/u(k)) / 2
  u = u0
  for k in range(n):
    print("u_" + str(k), "=", round(u, 9))
    u = (u + 2 / u) / 2
```

Exemple — trace d'exécution

`seuil(1000, 0.9, 1)` $\to$ **66** ; contrôle : $u_{65} = 1{,}0611$ et $u_{66} = 0{,}955$.
`somme_geometrique(0.5, 30)` $\to 1{,}999999999$.
`suite_recurrente(1, 5)` $\to u_0 = 1$; $u_1 = 1{,}5$; $u_2 = 1{,}416666667$; $u_3 = 1{,}414215686$; $u_4 = 1{,}414213562$.

Remarque — interprétation mathématique

La fonction `seuil` renvoie 66, et les deux lignes de vérification établissent la minimalité : le rang 65 donne encore $1{,}0611 \geqslant 1$, le rang 66 donne $0{,}955 < 1$. C'est exactement la double justification exigée par la méthode 5. La somme géométrique approche 2 sans l'atteindre, conformément à $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La troisième trace montre qu'en quatre itérations on obtient $\sqrt{2}$ avec neuf décimales exactes : la convergence numérique *suggère* la limite, elle ne la démontre pas — c'est le rôle du théorème de convergence monotone.

Synthèse — les trois réflexes du chapitre

1. Récurrence : nommer $P(n)$, initialiser, prouver l'hérédité, conclure. L'initialisation n'est jamais facultative.

2. Formes indéterminées : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ — factoriser par le terme dominant ou utiliser la quantité conjuguée.

3. Convergence monotone : croissante et majorée $\Rightarrow$ convergente, avec $\lim u_n \leqslant M$; croissante non majorée $\Rightarrow +\infty$.

Limites usuelles : $\frac{1}{n^k} \to 0$; $n^k \to +\infty$; $\sqrt{n} \to +\infty$; $q^n \to 0$ si $|q| < 1$ et $\to +\infty$ si $q > 1$.

Comparaison et gendarmes pour les suites contenant $\cos n$, $\sin n$ ou $(-1)^n$.

Arithmético-géométrique : point fixe $\ell = \frac{b}{1-a}$, suite auxiliaire $v_n = u_n - \ell$, forme explicite, limite.