DEVOIR SURVEILLÉ TYPE

Suites : récurrence et limites

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Barème indicatif : Exercice 1 (5 pts) · Exercice 2 (4 pts) · Exercice 3 (6 pts) · Exercice 4 (5 pts). Les exercices sont indépendants. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 — Vrai / Faux (5 points)

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant (contre-exemple ou démonstration).

1. Si (u_n) est croissante et majorée par M, alors $\lim u_n = M$.
2. Si pour tout n, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, alors $\lim u_n = 0$.
3. La suite $u_n = \dfrac{2^n}{3^n + 1}$ converge vers 0.
4. Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim (u_n + v_n) = 0$.
5. La suite $u_n = 3 - \dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n \geqslant 1)$ converge.

Exercice 2 — Calculs de limites (4 points)

Déterminer, en détaillant, les limites des suites suivantes.

1. $u_n = -3n^2 + 5n - 1$
2. $v_n = \dfrac{2n^2 - n}{3n^2 + 4}$
3. $w_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$
4. $t_n = \dfrac{4^n + n}{4^n - 2^n}$

Exercice 3 — Étude d'une suite récurrente (6 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4} u_n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 4$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) converge.
5. On pose $v_n = u_n - 4$. Montrer que (v_n) est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
6. Exprimer u_n en fonction de n puis déterminer $\lim u_n$.
7. Recopier et compléter la fonction Python pour qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $u_n - 4 < 10^{-3}$.

```
def seuil():
  u = 8
  n = 0
  while ......:
    u = ......
    n = ......
  return n
```

Exercice 4 — Suite définie par une fonction (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Justifier que f est croissante sur $[0;+\infty[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
3. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ et que $\ell \leqslant 4$.
4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ.
5. Montrer que pour tout n, $4 - u_{n+1} = \dfrac{3(4-u_n)}{\sqrt{3u_n+4}+4}$, puis que $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}(4-u_n)$.
6. En déduire que $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ et retrouver la valeur de ℓ.