DEVOIR SURVEILLÉ N°1 · 7 SEPTEMBRE 2024

Suites : récurrence et premières limites

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Exercice 1 — Limites (6 points)

Déterminer, en justifiant brièvement, la limite de chaque suite.

1. $u_n = 4 - \dfrac{7}{n^2}$
2. $u_n = -3n^3 + n^2 - 1$
3. $u_n = \dfrac{2n+1}{5n-3}$
4. $u_n = 6 \times 0{,}4^n - 2$
5. $u_n = \dfrac{\sin n}{n} + 1$
6. $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$

Exercice 2 — Récurrence (7 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.
4. En déduire $\lim u_n$.
5. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Exercice 3 — Suite arithmético-géométrique (7 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$. On pose $v_n = u_n - 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Déterminer $\lim u_n$.
5. Démontrer que (u_n) est décroissante.
6. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n - 4 < 0{,}01$. On pourra s'aider de la calculatrice mais on justifiera la réponse.

DEVOIR SURVEILLÉ N°1 · MARDI 30 SEPTEMBRE 2025

Suites : limites et récurrence

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Exercice 1 (5 points)

Calculer les limites suivantes en détaillant les calculs.

a. $u_n = \dfrac{2n - n^2}{(n-1)(5-2n)}$

b. $v_n = \dfrac{1}{n - \sin n}$

c. $w_n = 5^n - 3^n$

d. $a_n = \sqrt{n^2+5} - n$

Exercice 2 (5 points)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

a. Une suite convergente est minorée.

b. (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que (u_n) et $(u_n \times v_n)$ sont convergentes ; alors la suite (v_n) est convergente.

c. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$; alors la suite (u_n) est minorée par 1.

d. Une suite non majorée est divergente.

e. (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes ; alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est aussi convergente.

Exercice 3 (5 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$.

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

   c. En déduire le sens de variation de (u_n).

2. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n\sqrt{u_n}$.

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$.
3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $S_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}S_n$.
   b. En déduire que $0 \leqslant S_n \leqslant 2\,(1 - u_{n+1})$.
   c. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°2 · 8 OCTOBRE 2025

Suites numériques, limites et récurrence

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Exercice 1 — Vrai ou faux (4 points)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant (démonstration ou contre-exemple).

1. Si (u_n) est décroissante et minorée par -2, alors $\lim u_n = -2$.
2. Si $u_n \geqslant n^2 - 100$ pour tout n, alors $\lim u_n = +\infty$.
3. La suite $u_n = \dfrac{5^n}{2^n + 5^n}$ converge vers 1.
4. Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = 0$, alors $\lim(u_n v_n) = 0$.

Exercice 2 — Limites (5 points)

Déterminer les limites suivantes en détaillant les étapes.

1. $u_n = \dfrac{-n^2 + 6n}{2n^2 + 1}$
2. $w_n = \dfrac{2\cos n - n}{n + 3}$
3. $v_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$
4. $t_n = \dfrac{3^{n+1} + 1}{3^n - 2}$

Exercice 3 — Suite définie par une fonction (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x + 8}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Justifier que f est croissante sur $[0; +\infty[$ et calculer $f(4)$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
3. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant 4$.
4. On admet que $\ell = f(\ell)$. Déterminer ℓ.
5. Démontrer que pour tout n, $4 - u_{n+1} = \dfrac{2(4 - u_n)}{\sqrt{2u_n + 8} + 4}$, puis que $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.
6. En déduire que $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la valeur de ℓ.

Exercice 4 — Modélisation et algorithmique (5 points)

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau. Chaque jour, 20 % du volume est consommé, puis 150 litres sont ajoutés le soir. On note u_n le volume (en litres) le soir du jour n, avec $u_0 = 1000$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 150$ et calculer u_1.
2. On pose $v_n = u_n - 750$. Démontrer que (v_n) est géométrique et exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer $\lim u_n$ et interpréter.
4. Démontrer que (u_n) est décroissante.
5. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre pour qu'elle renvoie le premier jour où le volume est strictement inférieur à 760 L, puis déterminer par le calcul la valeur renvoyée.

```
def jour():
  u = 1000
  n = 0
  while ......:
    u = ......
    n = n + 1
  return n
```