DEVOIR SURVEILLÉ N°1 · 7 SEPTEMBRE 2024

Suites : récurrence et premières limites

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Exercice 1 — Limites (6 points)

Déterminer, en justifiant brièvement, la limite de chaque suite.

1. $u_n = 4 - \dfrac{7}{n^2}$
2. $u_n = -3n^3 + n^2 - 1$
3. $u_n = \dfrac{2n+1}{5n-3}$
4. $u_n = 6 \times 0{,}4^n - 2$
5. $u_n = \dfrac{\sin n}{n} + 1$
6. $u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$

Exercice 2 — Récurrence (7 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.
4. En déduire $\lim u_n$.
5. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Exercice 3 — Suite arithmético-géométrique (7 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$. On pose $v_n = u_n - 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Déterminer $\lim u_n$.
5. Démontrer que (u_n) est décroissante.
6. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n - 4 < 0{,}01$. On pourra s'aider de la calculatrice mais on justifiera la réponse.