DEVOIR SURVEILLÉ N°1 · MARDI 30 SEPTEMBRE 2025

Suites : limites et récurrence

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Exercice 1 (5 points)

Calculer les limites suivantes en détaillant les calculs.

a. $u_n = \dfrac{2n - n^2}{(n-1)(5-2n)}$

b. $v_n = \dfrac{1}{n - \sin n}$

c. $w_n = 5^n - 3^n$

d. $a_n = \sqrt{n^2+5} - n$

Exercice 2 (5 points)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

a. Une suite convergente est minorée.

b. (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que (u_n) et $(u_n \times v_n)$ sont convergentes ; alors la suite (v_n) est convergente.

c. (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$; alors la suite (u_n) est minorée par 1.

d. Une suite non majorée est divergente.

e. (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes ; alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est aussi convergente.

Exercice 3 (5 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1$.

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

   c. En déduire le sens de variation de (u_n).

2. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n$.

   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n\sqrt{u_n}$.

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 4$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$.
3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
   a. Montrer que pour tout entier naturel n, $S_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}S_n$.
   b. En déduire que $0 \leqslant S_n \leqslant 2\,(1 - u_{n+1})$.
   c. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.