DEVOIR SURVEILLÉ N°2 · 8 OCTOBRE 2025

Suites numériques, limites et récurrence

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Exercice 1 — Vrai ou faux (4 points)

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant (démonstration ou contre-exemple).

1. Si (u_n) est décroissante et minorée par -2, alors $\lim u_n = -2$.
2. Si $u_n \geqslant n^2 - 100$ pour tout n, alors $\lim u_n = +\infty$.
3. La suite $u_n = \dfrac{5^n}{2^n + 5^n}$ converge vers 1.
4. Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = 0$, alors $\lim(u_n v_n) = 0$.

Exercice 2 — Limites (5 points)

Déterminer les limites suivantes en détaillant les étapes.

1. $u_n = \dfrac{-n^2 + 6n}{2n^2 + 1}$
2. $w_n = \dfrac{2\cos n - n}{n + 3}$
3. $v_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$
4. $t_n = \dfrac{3^{n+1} + 1}{3^n - 2}$

Exercice 3 — Suite définie par une fonction (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x + 8}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Justifier que f est croissante sur $[0; +\infty[$ et calculer $f(4)$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
3. En déduire que (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant 4$.
4. On admet que $\ell = f(\ell)$. Déterminer ℓ.
5. Démontrer que pour tout n, $4 - u_{n+1} = \dfrac{2(4 - u_n)}{\sqrt{2u_n + 8} + 4}$, puis que $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.
6. En déduire que $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la valeur de ℓ.

Exercice 4 — Modélisation et algorithmique (5 points)

Un réservoir contient 1 000 litres d'eau. Chaque jour, 20 % du volume est consommé, puis 150 litres sont ajoutés le soir. On note u_n le volume (en litres) le soir du jour n, avec $u_0 = 1000$.

1. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 150$ et calculer u_1.
2. On pose $v_n = u_n - 750$. Démontrer que (v_n) est géométrique et exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer $\lim u_n$ et interpréter.
4. Démontrer que (u_n) est décroissante.
5. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre pour qu'elle renvoie le premier jour où le volume est strictement inférieur à 760 L, puis déterminer par le calcul la valeur renvoyée.

```
def jour():
  u = 1000
  n = 0
  while ......:
    u = ......
    n = n + 1
  return n
```