Chapitre 1. Fiche d'exercices n°2

# Limites de suites et récurrence

## Série A ⋆ Automatismes

### Exercice 1 ⋆

Donner la limite de chaque suite. **a.** $u_n = 5 - \dfrac{3}{n}$ **b.** $u_n = -2n^2 + 1$ **c.** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + 7$
**d.** $u_n = 0{,}6^n$ **e.** $u_n = -3 \times 2^n$

### Exercice 2 ⋆

Donner, si elle existe, la limite de $q^n$ pour : **a.** $q = 1{,}05$ **b.** $q = -0{,}5$ **c.** $q = 1$ **d.** $q = -1{,}2$

### Exercice 3 ⋆

Pour la propriété $P(n)$ : « $3^n \geqslant 2n + 1$ », rédiger uniquement l'initialisation au rang $n_0 = 0$.

### Exercice 4 ⋆

Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n + 4$. Pour $P(n)$ : « $u_n = 4n + 5$ », rédiger uniquement l'hérédité.

### Exercice 5 ⋆

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 2^n - 3$.

### Exercice 6 ⋆

Calculer $S_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$ puis déterminer $\lim S_n$.

### Exercice 7 ⋆

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$ : $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

### Exercice 8 ⋆

Soit $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Encadrer $u_n$ puis déterminer $\lim u_n$.

## Série B ⋆⋆ Entraînement

### Exercice 9 ⋆⋆

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

### Exercice 10 ⋆⋆

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n - 1$ est divisible par 4.

### Exercice 11 ⋆⋆

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left( \sqrt{n^2 + 3} - n \right)$.

**Exercice 12** ⋆⋆

Déterminer les limites. **a.** $u_n = \dfrac{n^2-4n}{3n^2+1}$ **b.** $v_n = \dfrac{5n+2}{n^2+1}$ **c.** $w_n = \dfrac{n^3+1}{n^2+n}$

**Exercice 13** ⋆⋆

Soit $u_n = n^2 - 3\sin n$. Démontrer que $\lim u_n = +\infty$.

**Exercice 14** ⋆⋆

Soit $u_n = \dfrac{3\cos n}{n+1}$. Démontrer que $(u_n)$ converge et donner sa limite.

**Exercice 15** ⋆⋆

Déterminer, en justifiant, $\lim (2 - 4 \times 0{,}85^n)$ et $\lim \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$.

**Exercice 16** ⋆⋆

Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 2$. On pose $v_n = u_n - 8$.

a. Démontrer que $(v_n)$ est géométrique ; préciser sa raison et $v_0$.
b. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et déterminer $\lim u_n$.
c. Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $8 - u_n < 0{,}1$.

## Série C ⋆⋆⋆ Applications

**Exercice 17** ⋆⋆⋆

Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout $n$, $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$.
b. En déduire que $(u_n)$ converge. On admet que sa limite $\ell$ vérifie $\ell = \sqrt{3\ell + 4}$ ; déterminer $\ell$.

**Exercice 18** ⋆⋆⋆

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$. On pose $v_n = u_n - 4$.

a. Démontrer que $(v_n)$ est géométrique.
b. Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
c. Déterminer $\lim u_n$ et le sens de variation de $(u_n)$.
d. Déterminer le plus petit rang $n$ tel que $4 - u_n < 10^{-3}$.

**Exercice 19** ⋆⋆⋆

Soit $u_n = \dfrac{n + 2(-1)^n}{2n+1}$. Démontrer que $(u_n)$ converge et donner sa limite.

**Exercice 20** ⋆⋆⋆

Déterminer les limites des suites définies par :

a. $u_n = \dfrac{3n + (-1)^n\sqrt{n}}{n+2}$

b. $v_n = \dfrac{3^n - 2^{n-1}}{6^{n+1} - 5^{n-1}}$

c. $w_n = \sqrt{n^2+5n} - n$

d. $a_n = \dfrac{2n^2 + \sin n}{n(3-n)}$

e. $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+6}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$ (pour $n \geqslant 1$).

**Exercice 21** ⋆⋆⋆

Soit $(u_n)$ telle que $u_0 = 0$ et, pour tout $n$, $|u_{n+1} - 3| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 3|$.

a. Démontrer par récurrence que $|u_n - 3| \leqslant 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b. En déduire $\lim u_n$.

**Exercice 22** ⋆⋆⋆

Soit $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 1$.

a. Écrire une fonction Python `seuil(S)` renvoyant le plus petit rang $n$ tel que $u_n > S$.

b. On pose $v_n = u_n - 5$. Déterminer la nature de $(v_n)$ et en déduire $u_n$.

c. Que renvoie `seuil(100)` ? Justifier par le calcul.

**Exercice 23** ⋆⋆⋆

Soit $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.
(On utilisera une récurrence portant sur deux rangs consécutifs.)

**Exercice 24** ⋆⋆⋆

Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, on a $4^n \geqslant 1 + 3n^2$, et en déduire $\lim (3^n - 4^n + 5n)$.

## Série D ⋆⋆⋆⋆ Modélisation et approfondissement

**Exercice 25** ⋆⋆⋆⋆

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout $n$, $u_n > 1$.

b. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Démontrer que $(v_n)$ est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

c. En déduire $u_n$ en fonction de $n$, puis $\lim u_n$.

**Exercice 26** ⋆⋆⋆⋆

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 16}{u_n - 1}$ (on admet que cette suite est bien définie).

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 4$.
2. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 4}$.
   **a.** Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique.
   **b.** Déterminer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.
   **c.** Calculer $\lim u_n$.
3. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.
   Calculer ensuite l'expression de $P_n = 3^{v_0} \times 3^{v_1} \times 3^{v_2} \times \cdots \times 3^{v_n}$ en fonction de $n$.

**Exercice 27** ⋆⋆⋆⋆

Un patient prend chaque matin une dose de 20 mg d'un médicament. En 24 h, l'organisme élimine 40 % de la quantité présente. On note $q_n$ la quantité (en mg) présente juste après la prise du jour $n$, avec $q_0 = 20$.

a. Justifier que $q_{n+1} = 0{,}6q_n + 20$.
b. Déterminer $\ell$ tel que $\ell = 0{,}6\ell + 20$, puis démontrer que $(q_n - \ell)$ est géométrique.
c. Exprimer $q_n$, déterminer $\lim q_n$ et interpréter.
d. À partir de quel jour la quantité dépasse-t-elle 49 mg ?

**Exercice 28** ⋆⋆⋆⋆

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

a. Vérifier que $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.
b. Démontrer par récurrence que $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$.
c. En déduire que $(u_n)$ est croissante, majorée, et déterminer sa limite.

**Exercice 29** ⋆⋆⋆⋆

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est minorée par 0 et majorée par 3.
2. En déduire que la suite $(u_n)$ est croissante.
3. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(3 - u_n)$.
   **b.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, puis calculer $\lim u_n$.

**Exercice 30** ⋆⋆⋆⋆

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on admet que l'équation $x^3 + x = n$ admet une unique solution $\alpha_n > 0$ (la fonction $f(x) = x^3 + x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

a. Démontrer que $(\alpha_n)$ est croissante.
b. Démontrer que $(\alpha_n)$ n'est pas majorée. En déduire $\lim \alpha_n$.

## Série E ⋆⋆⋆⋆⋆ Défi

**Exercice 31** ⋆⋆⋆⋆⋆

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_1 = \dfrac{4}{3}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + \dfrac{2n-1}{3n(n+1)}$.

1. Vérifier que $u_1 > u_2 > u_3$.
2. **a.** Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) - \dfrac{2(n-1)}{3n(n+1)(n+2)}$.
   **b.** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.
3. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.
   **a.** Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique.
   **b.** Déterminer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.
   **c.** Calculer $\lim u_n$.

**Exercice 32** ⋆⋆⋆⋆⋆

(Méthode de Héron) Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

a. Démontrer que pour tout $n$, $u_n > 0$ et $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$. En déduire $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
b. Démontrer que $(u_n)$ est décroissante et conclure qu'elle converge.
c. Démontrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$, puis que $0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(2 - \sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Déterminer la limite.

**Exercice 33** ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

a. Démontrer que $(u_n)$ est croissante et que $u_n \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $n$.
b. On suppose que $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$.
Montrer que $\ell = \ell + \ell^2$ et aboutir à une contradiction.
c. Conclure sur la limite de $(u_n)$.

## Série F ⋆⋆ Algorithmes de seuil en Python

**Exercice 34** ⋆⋆ · seuil, suite divergente

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}5u_n - 1$.
1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. On pose $v_n = u_n - 2$. Démontrer que $(v_n)$ est géométrique et en déduire que $u_n = 2 + 1{,}5^n$.
3. Déterminer $\lim u_n$ et justifier que $(u_n)$ est croissante.
4. Écrire une fonction Python `seuil(S)` qui renvoie le plus petit entier $n$ tel que $u_n > S$.
5. Que renvoie `seuil(50)` ? Retrouver ce résultat par le calcul, à l'aide du logarithme népérien.
6. Expliquer pourquoi la boucle de la fonction `seuil` s'arrête toujours, quel que soit le réel $S$.

**Exercice 35** ⋆⋆ · seuil, suite convergente

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 2{,}4$.
1. Déterminer le réel $\ell$ vérifiant $\ell = 0{,}6\ell + 2{,}4$. Montrer que $u_n = \ell + 4 \times 0{,}6^n$ et en déduire $\lim u_n$.
2. On considère la fonction Python ci-dessous. Expliquer ce qu'elle renvoie.

```
def rang(e):
    u = 10
    n = 0
    while abs(u - 6) >= e:
        u = 0.6*u + 2.4
        n = n + 1
    return n
```

3. Déterminer par le calcul la valeur renvoyée par `rang(0.001)`.
4. Justifier que la boucle s'arrête pour tout réel $e > 0$.
5. Modifier la fonction pour qu'elle renvoie, en plus de $n$, la valeur de $u_n$ correspondante.

Chapitre 1. Sujets du Bac

# Suites numériques

## Exercice A : Bac Amérique du Nord, 20 mai 2026, sujet 1, exercice 2 (partie A) ⋆⋆

**Exercice A** ⋆⋆ · modèle discret

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie un modèle d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à 4 000 individus au 1er janvier 2025.

**Partie A : étude d'un modèle discret.** On modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite $(u_n)$. Pour tout entier naturel $n$, $u_n$ désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1er janvier de l'année $2025 + n$. La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n}$. On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier, pour tout entier $n$, $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donné par ce modèle.
2. On note $h$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = 4 - \dfrac{4}{x}$.
   a. Justifier que la fonction $h$ est croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.
   c. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.
   d. Justifier que $\ell = 2$.
   e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?
3. On considère le script Python ci-dessous.
   a. Soit $s$ un réel appartenant à l'intervalle $]2\,;4[$. Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier $n$ tel que $u_n < s$.
   b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def population(s) :
    u = 4
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = ...
    return n
```

## Exercice B : Bac Asie, 12 juin 2025, sujet 2, exercice 2 ⋆⋆

**Exercice B** ⋆⋆ · suites couplées et Python

**Partie A.** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$. Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de $u_1$ et $u_2$.
2. Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ pour tout $n$ entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$. Justifier la réponse.

**Partie B.** Soit $(w_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $w_0 = 45$ et $w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7$.

1. Montrer que $w_1 = 44{,}5$.
2. On souhaite écrire une fonction `suite` en langage Python, qui renvoie la valeur du terme $w_n$ pour une valeur de $n$ donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction. L'exécution de `suite(1)` ne renvoie pas le terme $w_1$. Comment modifier la fonction `suite` afin que l'exécution de `suite(n)` renvoie la valeur du terme $w_n$ ?

```
def suite(n):
    U = 30
    W = 45
    for i in range(1, n+1):
        U = U / 2 + 10
        W = W / 2 + U / 2 + 7
    return W
```

3. **a.** Montrer, par récurrence sur $n$, que pour tout entier naturel $n$ : $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$.

   **b.** On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a $0 \leqslant 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}$. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite $(w_n)$ ?

## Exercice C : Bac Centres étrangers, 13 juin 2025, sujet 2, exercice 1 ⋆⋆⋆

**Exercice C** ⋆⋆⋆ · comparaison de deux modèles

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B. Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

**Partie A.** Dans le milieu A, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93. Pour tout entier naturel $n$, $u_n$ représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie B.** Dans le milieu B, l'évolution de la population est modélisée par la suite $(v_n)$ définie par $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n$ ; $v_n$ représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
   Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.
2. Démontrer que la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
4. En déduire que la suite $(v_n)$ est convergente vers une limite $\ell$.
5. **a.** Justifier que la limite $\ell$ vérifie $f(\ell) = \ell$, puis en déduire la valeur de $\ell$.
   **b.** Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie C.** Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-dessous.
   **a.** Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   **b.** Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n + 1
print(2025 + n)
```