Chapitre 1. Fiche d'exercices n°1

# Raisonnement par récurrence

**Exercice 1** ⋆

Démontrer que quel que soit l'entier naturel $n$ strictement positif on a :

a. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

b. $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

c. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Exercice 2** ⋆

a. Montrer que $4^n+5$ est un multiple de 3 quel que soit l'entier naturel $n$.

b. Montrer que $12^n+10^{2n+1}$ est un multiple de 11 quel que soit l'entier naturel $n$.

c. Montrer que $3^{2n+1}+2^{n+2}$ est un multiple de 7 quel que soit l'entier naturel $n$.

**Exercice 3** ⋆

$n$ est un entier naturel non nul. On considère $S_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p(p+1)}$. Démontrer que $S_n=\dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n\geqslant 1$.

**Exercice 4** ⋆⋆

Démontrer que pour tout entier naturel $n$ strictement supérieur à 4, on a : $2^n>n^2$.

**Exercice 5** ⋆

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f_n$ définie pour $x\in\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x^n$. Démontrer par récurrence que $f_n$ est dérivable et que pour tout réel $x$ : $f_n'(x)=nx^{n-1}$.

**Exercice 6** ⋆

Soit $(u_n)$ une suite définie par son premier terme $u_0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\sqrt{u_n+15}$. Montrer que :

a. lorsque $u_0\in[0;4]$, on a pour tout entier naturel $n$ : $0\leqslant u_n\leqslant 5$ ;

b. lorsque $u_0\in[5;10]$, on a pour tout entier naturel $n$ : $4\leqslant u_n\leqslant 10$.

**Exercice 7** ⋆⋆

$n$ est un entier naturel non nul. On considère $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $T_n<2\sqrt{n}$.

**Exercice 8** ⋆

La suite $(u_n)$ est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout naturel $n$, $0 < u_n < 2$, et que $(u_n)$ est croissante.

**Exercice 9** ⋆⋆

$n$ personnes entrent dans une salle. En entrant, chaque personne serre la main à chacune des personnes présentes dans la salle. Combien y a-t-il de poignées de mains échangées au total ? Démontrer par récurrence la formule obtenue.

**Exercice 10** ⋆

On considère la propriété $\mathcal{P}$ définie par : « $10^n + 1$ est un multiple de 9 ».

a. Vérifier que cette propriété est héréditaire.

b. Peut-on conclure que $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n$ ?

**Exercice 11** ⋆⋆

Dans chacun des cas, calculer les premiers termes, conjecturer une formule explicite de $u_n$ et la démontrer par récurrence.

a. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + n$ b. $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$ c. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$

**Exercice 12** ⋆⋆

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Soit $f$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$. Étudier le sens de variation de $f$ sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul on a : $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

**Exercice 13** ⋆⋆ (récurrence double)

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ : $u_n = 8 \times 2^n - 7 \times 3^n$.

**Exercice 14** ⋆⋆⋆

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{2 + u_n}$. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.