Chapitre 2. Cours

Limites de fonctions

Étudier une limite, c'est décrire le comportement de $f(x)$ quand x devient très grand, très petit, ou s'approche d'une valeur où la fonction n'est pas définie. Sur la courbe, ces comportements se lisent grâce aux **asymptotes**.

1. Limite d'une fonction à l'infini

1.1 Limite finie à l'infini — asymptote horizontale

Définition (limite finie en $+\infty$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a\,;+\infty[$ et ℓ un réel. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
La droite d'équation $y=\ell$ est alors **asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

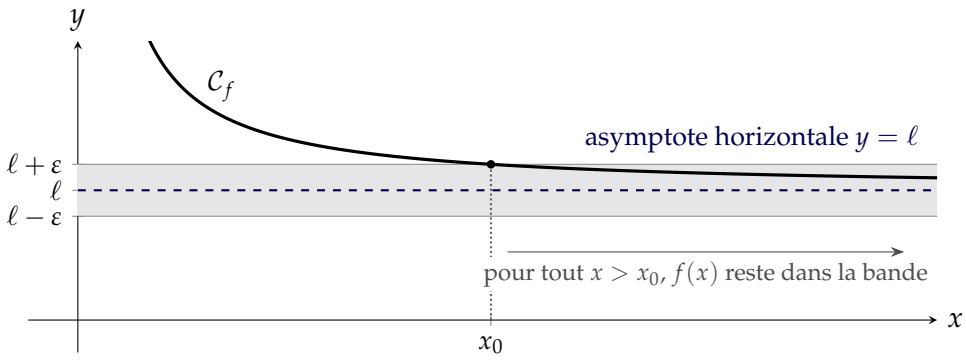


Figure 1 — Limite finie en $+\infty$: aussi étroite que soit la bande autour de ℓ, la courbe finit par y rester.

Remarque — En $-\infty$

On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$: tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x négatif et assez grand en valeur absolue. La droite $y=\ell$ est alors asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$. Une courbe peut avoir deux asymptotes horizontales différentes (figure 2).

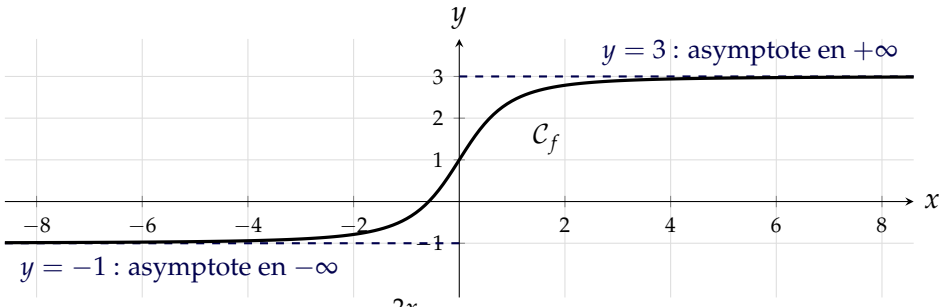


Figure 2 — $f(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$.

1.2 Limite infinie à l'infini

Définition (limite infinie en $+\infty$)

Soit f définie sur un intervalle $]a\,;+\infty[$.

- f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ lorsque tout intervalle $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

On définit de la même façon $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, en considérant les x négatifs assez grands en valeur absolue.

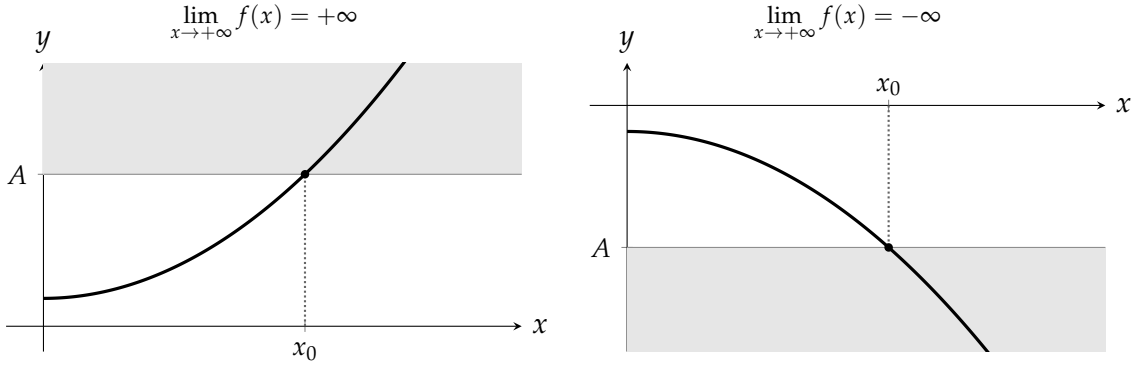


Figure 3 — Limite infinie en $+\infty$: quel que soit le seuil A, la courbe finit par rester au-dessus (à gauche) ou en dessous (à droite).

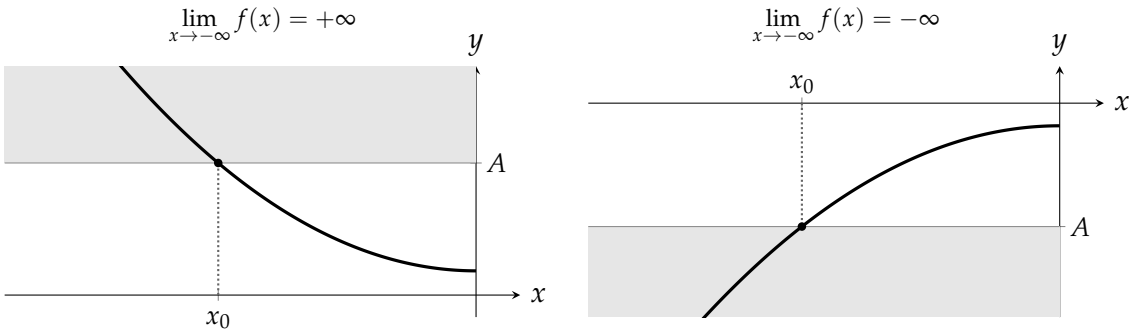


Figure 4 — Limite infinie en $-\infty$: les deux cas possibles.

Attention — Une fonction n'a pas toujours de limite

Les fonctions sin et cos n'ont pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$: elles oscillent indéfiniment entre -1 et 1 sans se rapprocher d'aucune valeur.

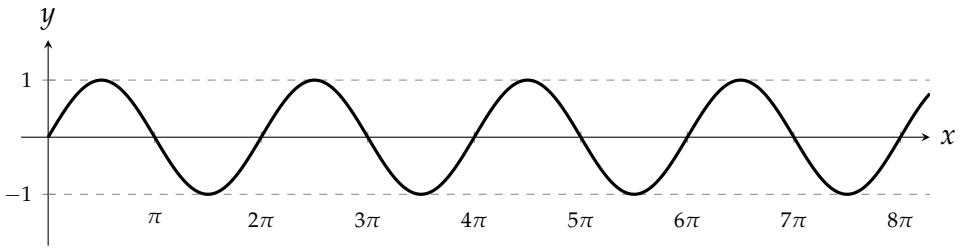


Figure 5 — $y = \sin x$: aucune bande étroite ne contient la courbe à partir d'un certain rang — pas de limite en $+\infty$.

2. Limite d'une fonction en un réel a

Dans cette partie, f est définie sur un intervalle de la forme $]a\,;a+r[$ ou $]a-r\,;a[$, avec $r>0$: la fonction est définie « près de a », mais pas nécessairement en a.

2.1 Limite infinie en a — asymptote verticale

Définition (limite infinie en a)

- f a pour limite $+\infty$ en a lorsque tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.
- f a pour limite $-\infty$ en a lorsque tout intervalle $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Dans les deux cas, la droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale** à la courbe $\mathcal{C}_f$.

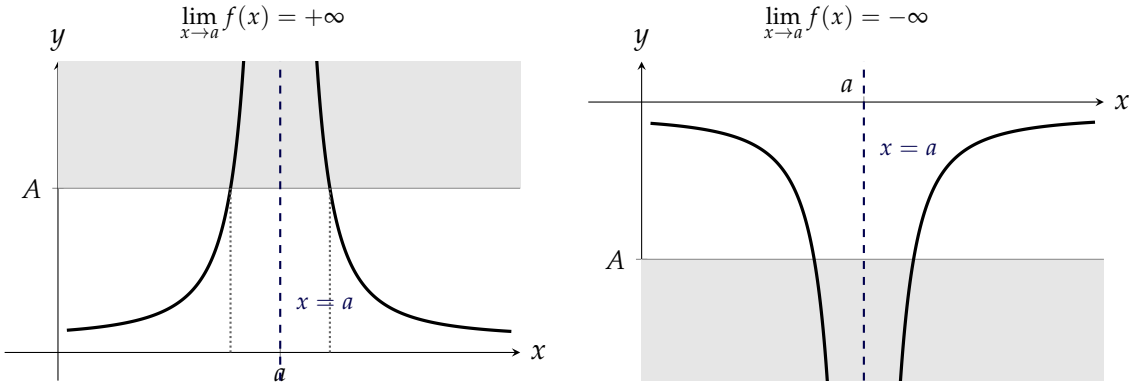


Figure 6 — Limite infinie en a : près de a, la courbe dépasse tout seuil A ; la droite $x=a$ est asymptote verticale.

2.2 Limite à gauche, limite à droite

Définition (limites à gauche et à droite)

Lorsqu'on ne considère que les réels x de $]a\,;a+r[$, on parle de **limite à droite** en a (ou limite par valeurs supérieures), notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Lorsqu'on ne considère que les réels x de $]a-r\,;a[$, on parle de **limite à gauche** en a (ou limite par valeurs inférieures), notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Exemple 1 — La fonction inverse et la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x-1}$

a. La fonction inverse $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}$ est définie pour $x\neq 0$, et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$. L'axe des ordonnées ($x=0$) est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, l'axe des abscisses ($y=0$) est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Soit $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$, définie pour $x\neq 1$. Si $x>1$ est proche de 1, alors $x-1$ est positif et proche de 0, donc son inverse est très grand : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} g(x)=+\infty$. De même, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} g(x)=-\infty$. La droite $x=1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_g$.

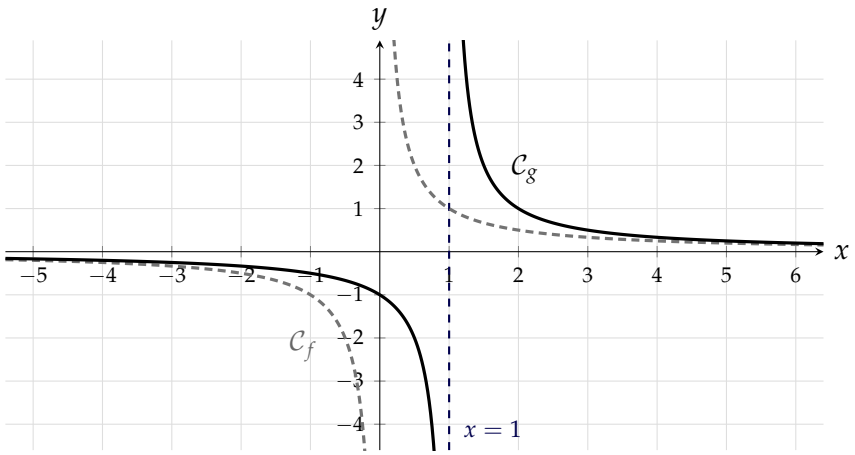


Figure 7 — $\mathcal{C}_f$ (tirets gris) et $\mathcal{C}_g$ (trait plein) ; $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $\vec{\imath}$.

2.3 Limite finie en a

Définition (limite finie en a)

f a pour limite le réel ℓ en a lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Propriété — Fonctions usuelles

Si f est une fonction polynôme, rationnelle, racine carrée, exponentielle, sinus ou cosinus, et si f est définie en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Par exemple, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 3x + 1) = 4 - 6 + 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$.

3. Limites des fonctions de référence

Propriété — Tableau des limites de référence

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

Fonction	x^n	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	e^x
Limite en $+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$
Limite en $-\infty$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non définie	0
Limite en 0	0	n pair : $+\infty$ n impair : $-\infty$ à gauche, $+\infty$ à droite	0	1

Conséquences graphiques : l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ en $\pm\infty$ et à celle de l'exponentielle en $-\infty$; l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe de $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$.

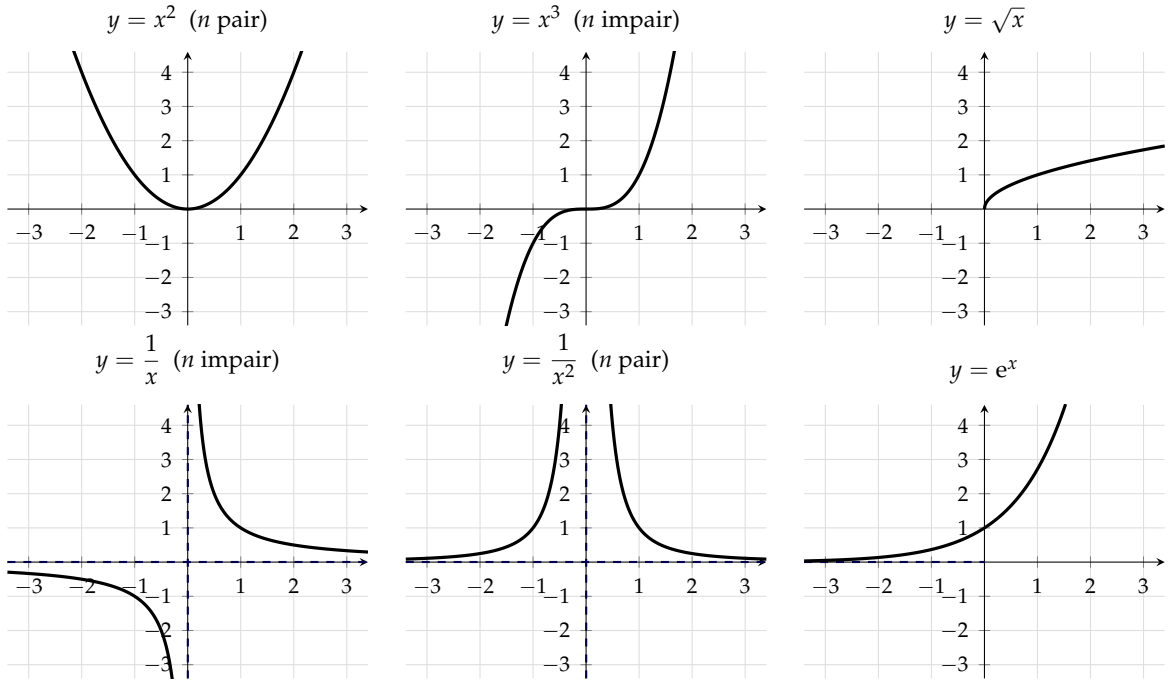


Figure 8 — Les six courbes de référence : chaque case du tableau s'y lit (asymptotes en tirets bleus).

Théorème (croissances comparées)

Pour tout entier $n \geqslant 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$.

En particulier $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$. « L'exponentielle l'emporte sur les puissances de x. »

Démonstration (de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ — exigible)

Soit $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0\,;+\infty[$. On a $g'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et $g''(x) = \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$, donc g' est croissante et $g'(x) \geqslant g'(0) = 1 > 0$; donc g est croissante et $g(x) \geqslant g(0) = 1 > 0$. Ainsi $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$, donc pour $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$: par comparaison (partie 6), $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. ■

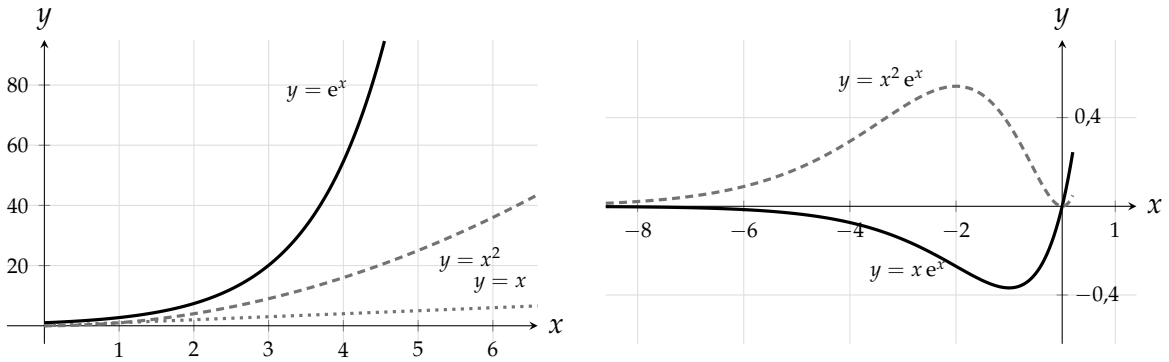


Figure 9 — Croissances comparées : en $+\infty$, e^x dépasse très vite x et x^2 ; en $-\infty$, $x\,\mathrm{e}^x$ et $x^2\mathrm{e}^x$ tendent vers 0.

4. Opérations sur les limites

Les tableaux suivants donnent, lorsque c'est possible, la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux fonctions f et g dont on connaît les limites. ℓ et ℓ' désignent des réels. Les limites peuvent être prises en $+\infty$, en $-\infty$, en un réel a, à gauche ou à droite — mais **toutes au même endroit**. La mention **F.I.** signale une **forme indéterminée** : le tableau ne permet pas de conclure, il faut transformer l'écriture.

Propriété — Limite d'une somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Propriété — Limite d'un produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si g a pour limite	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
alors $f\times g$ a pour limite	$\ell\,\ell'$	$\pm\infty$, selon la règle des signes				**F.I.**

Propriété — Limite d'un inverse

Si g a pour limite	$\ell'\neq 0$	0 par valeurs supérieures (0^+)	0 par valeurs inférieures (0^-)	$\pm\infty$
alors $\dfrac{1}{g}$ a pour limite	$\dfrac{1}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Propriété — Limite d'un quotient

Comme $\dfrac{f}{g}=f\times\dfrac{1}{g}$, les deux tableaux précédents donnent :

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$ ou $\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
et si g a pour limite	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0^+ ou 0^-	0	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$, règle des signes	**F.I.**	$\pm\infty$, règle des signes	**F.I.**

Attention — Les quatre formes indéterminées

$$\text{« }\infty-\infty\text{ »}\qquad\text{« }0\times\infty\text{ »}\qquad\text{« }\frac{\infty}{\infty}\text{ »}\qquad\text{« }\frac{0}{0}\text{ »}$$

« Forme indéterminée » ne veut pas dire « pas de limite » : la limite dépend des fonctions en jeu. Pour la trouver, on change d'écriture : **factoriser** par le terme dominant, **développer**, utiliser l'**expression conjuguée** ou les **croissances comparées**.

Méthode — Limite en $\pm\infty$ d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle

- On **factorise par le terme de plus haut degré**, au numérateur et au dénominateur.
- Résultat à retenir : en $\pm\infty$, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré ; une fonction rationnelle a la même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

Exemple 2 — Lever une indétermination en $+\infty$

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-5x^2+1)$: forme « $\infty-\infty$ ». On factorise : $x^3-5x^2+1=x^3\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$. La parenthèse tend vers 1 et x^3 vers $+\infty$: par produit, la limite est $+\infty$.
b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$: forme « $\infty-\infty$ ». Avec l'expression conjuguée :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$: la limite est 0.
c. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)\,\mathrm{e}^x$: forme « $\infty\times 0$ ». On développe : $(2x-1)\mathrm{e}^x=2x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x$. Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to-\infty}x\,\mathrm{e}^x=0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$: la limite est 0.

Méthode — Limite en un réel a qui annule le dénominateur

1. Calculer la limite du numérateur en a : si elle est non nulle, la limite du quotient est infinie.
2. Étudier le **signe du dénominateur** au voisinage de a (tableau de signes) : 0^+ ou 0^-.
3. Conclure avec la règle des signes, **à gauche et à droite** de a.

Exemple 3 — Étude complète : $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+x}$

f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;0\}$ car $x^2+x=x(x+1)$.
En $\pm\infty$. $f(x)=\dfrac{x^2\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{2-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$: la droite $y=2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.
En 0. Le numérateur tend vers -1. Signe du dénominateur :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

Le dénominateur tend vers 0^- à gauche de 0, et vers 0^+ à droite. Par quotient :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty.$$

En -1. Le numérateur tend vers $2\times1-1=1$. Le dénominateur tend vers 0^+ à gauche de -1, et vers 0^- à droite :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=-\infty.$$

Les droites $x=-1$ et $x=0$ sont asymptotes verticales à $\mathcal{C}_f$.

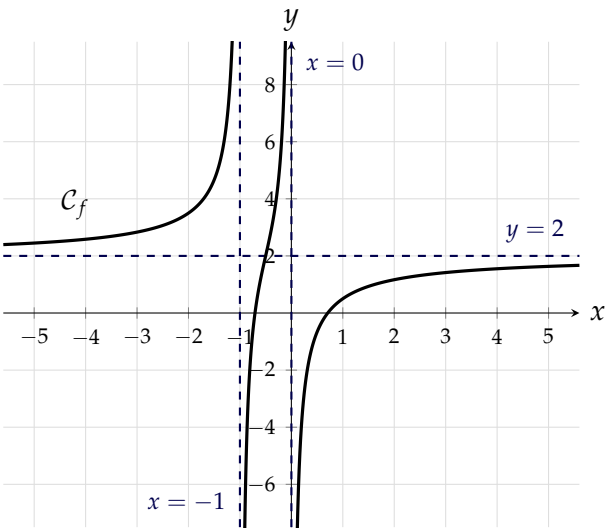


Figure 10 — Les trois asymptotes de $\mathcal{C}_f$.

5. Limite d'une fonction composée

Théorème (limite d'une composée)

Soient a, b, c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} g\big(u(x)\big) = c$.

Méthode — Composition : la rédaction en quatre lignes

1. Poser $X = u(x)$ (la « partie intérieure »).
2. Calculer $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$.
3. Calculer $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$ (limite de référence).
4. Conclure : par composition, $\lim\limits_{x\to a} g\big(u(x)\big) = c$.

Exemple 4

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+3}$: on pose $X = -x^2+3$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+3) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Par composition, la limite est 0.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x+1}{x}}$: $X = \dfrac{4x+1}{x} = 4 + \dfrac{1}{x}$ tend vers 4, et $\lim\limits_{X\to4} \sqrt{X} = 2$. Par composition, la limite est 2.

c. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \mathrm{e}^{1/x}$: $X = \dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$: la limite est $+\infty$. À gauche, X tend vers $-\infty$: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \mathrm{e}^{1/x} = 0$.

6. Limites et ordre : comparaison et encadrement

Les énoncés sont donnés en $+\infty$, pour des fonctions définies sur un intervalle $]a\,;+\infty[$. Ils s'étendent aux limites en $-\infty$, en un réel, à gauche ou à droite, en adaptant l'intervalle.

Théorème (comparaison des limites)

Si, pour tout x de $]a\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$, et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Si des fonctions sont rangées dans un certain ordre, leurs limites sont rangées dans le même ordre.

Attention — Inégalités strictes

Le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes : de $f(x) < g(x)$ on déduit seulement $\ell \leqslant \ell'$. Par exemple $-\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, et pourtant les deux limites en $+\infty$ sont égales (à 0). De plus, ce théorème compare deux limites qui existent : il ne prouve pas l'existence d'une limite.

Théorème (théorème de comparaison)

- Si, pour tout x de $]a\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
  Toute fonction supérieure à une fonction qui tend vers $+\infty$ tend aussi vers $+\infty$.
- Si, pour tout x de $]a\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
  Toute fonction inférieure à une fonction qui tend vers $-\infty$ tend aussi vers $-\infty$.

Théorème (théorème des gendarmes)

Si, pour tout x de $]a\,;+\infty[$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Exemple 5 — Encadrer un sinus ou un cosinus

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$: pour $x > 0$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donne $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.
b. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \cos x)$: $\cos x \geqslant -1$ donne $x + \cos x \geqslant x - 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$: par comparaison, la limite est $+\infty$.

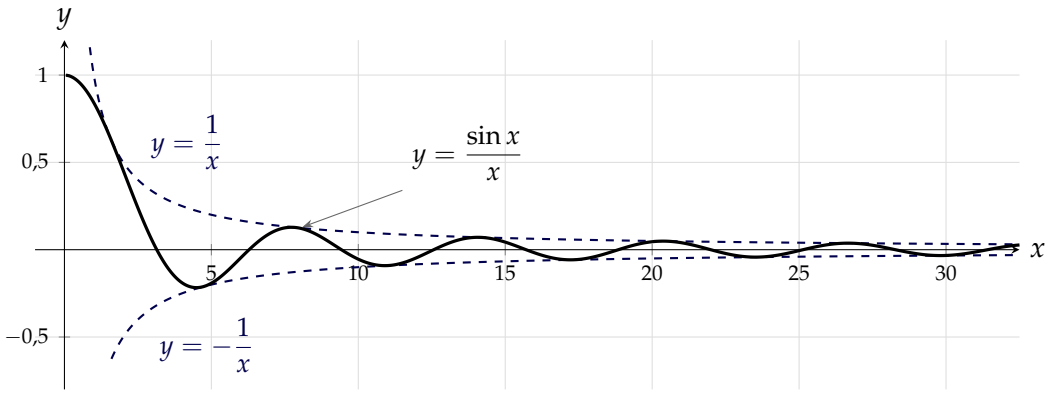


Figure 11 — Théorème des gendarmes : coincée entre $-\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x}$, qui tendent vers 0, la courbe de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est forcée vers 0.

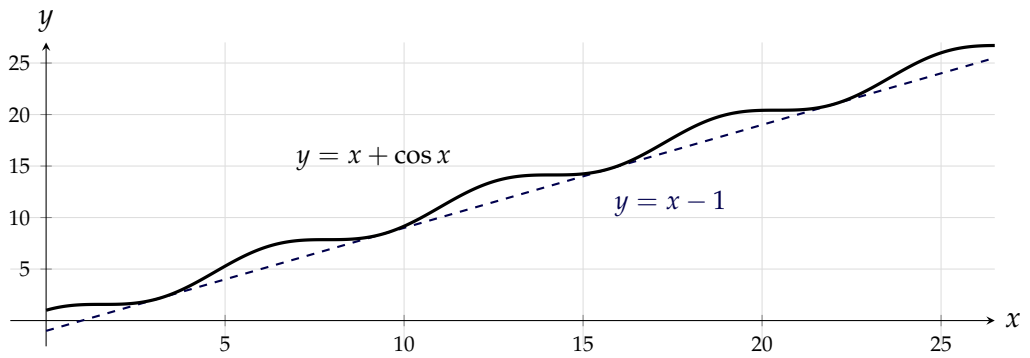


Figure 12 — Théorème de comparaison : la courbe de $x \mapsto x + \cos x$ reste au-dessus de la droite $y = x - 1$, qui « monte » vers $+\infty$.

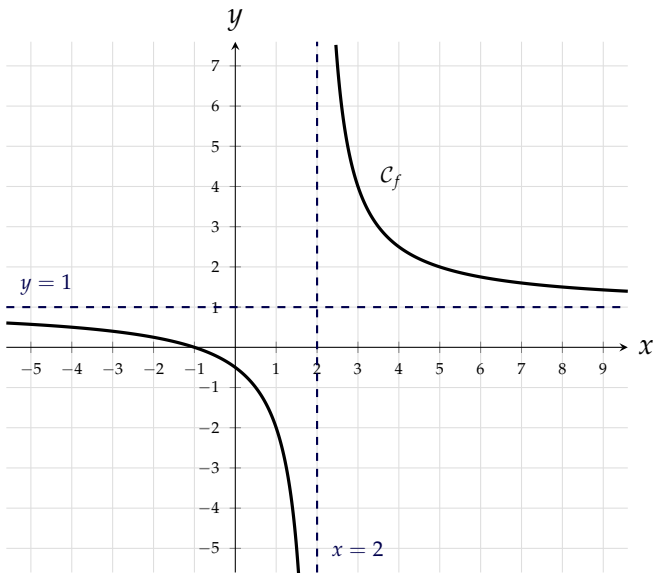
7. Asymptotes : lire et interpréter

Propriété — Du calcul à la courbe

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$) $\iff$ la droite $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (ou en $-\infty$).
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ (à gauche ou à droite de a) $\iff$ la droite $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Exemple 6 — Lire des limites sur une courbe et dans un tableau de variations

La fonction f ci-dessous est définie sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.



On lit :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$: asymptote horizontale $y = 1$;
- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = +\infty$: asymptote verticale $x = 2$.

Les limites se reportent aux extrémités des flèches du tableau de variations ; la double barre marque la valeur interdite.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

Figure 13 — $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x-2}$: chaque limite correspond à une asymptote ou à une extrémité de flèche.

8. Ce qu'il faut retenir — fiche de synthèse

Asymptote horizontale $y = \ell$: $\lim\limits_{\pm\infty} f = \ell$.

Asymptote verticale $x = a$: $\lim\limits_{a} f = \pm\infty$ (à gauche ou à droite).

Références : $x^n \to +\infty$ en $+\infty$; $\frac{1}{x^n} \to 0$ en $\pm\infty$; $\mathrm{e}^x \to +\infty$ en $+\infty$, $\to 0$ en $-\infty$.

Croissances comparées : $\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \to +\infty$ en $+\infty$; $x^n\mathrm{e}^x \to 0$ en $-\infty$.

F.I. : $\infty-\infty$, $0\times\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$. Polynômes et quotients : terme dominant. Racines : conjuguée. Exponentielle : croissances comparées.

Quotient « $\frac{\ell}{0}$ » : signe du dénominateur $\Rightarrow$ limites à gauche et à droite.

Composée : poser $X = u(x)$, deux limites successives.

Comparaison / gendarmes : minorer, majorer ou encadrer — réflexe dès qu'il y a sin ou cos.