TERMINALE SPÉCIALITÉ · DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Limites de fonctions

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée (mode examen)

Barème indicatif : Exercice 1 (4 pts) · Exercice 2 (5 pts) · Exercice 3 (6 pts) · Exercice 4 (5 pts).

Exercice 1 — QCM (4 points)

Une seule réponse exacte par question. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est demandée.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+2x^2\right)$ vaut : a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0 d) 2
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-1}{2x^2+x}$ vaut : a) 0 b) $+\infty$ c) $\dfrac{5}{2}$ d) 5
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x$ vaut : a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) 1
4. Si $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-\infty$, alors : a) $y=3$ est asymptote horizontale b) $x=3$ est asymptote verticale c) $f(3)=-\infty$ d) f est décroissante

Exercice 2 — Calculs de limites (5 points)

Déterminer les limites suivantes en détaillant les étapes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\mathrm{e}^x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x+1}{x^2-4}$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{2x+1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\cos x}{x}$

Exercice 3 — Étude d'une fonction rationnelle (6 points)

Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Déterminer les limites de f à gauche et à droite de 2. Interpréter graphiquement.
3. Montrer que pour tout $x\neq2$, $f(x)=x+\dfrac{3}{x-2}$.
4. En déduire que la droite $\Delta : y=x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de Δ.
6. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f (avec les limites).

Exercice 4 — Fonction avec exponentielle (5 points)

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Déterminer $\lim_{-\infty} g$ et $\lim_{+\infty} g$. En déduire deux asymptotes à $\mathcal{C}_g$.
2. Montrer que pour tout réel x, $0 < g(x) < 4$.
3. Montrer que $g'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ et en déduire le sens de variation de g.
4. Montrer que $\mathcal{C}_g$ admet le point $I(0;2)$ pour centre de symétrie, c'est-à-dire que pour tout x, $g(-x) + g(x) = 4$.