Devoir surveillé n°3 · 7 novembre 2023

Limites de fonctions et continuité

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Exercice 1 (4 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & \text{si } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 0 ?

2. Soit a un nombre réel. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leqslant 1, \\ x^2 + ax + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Déterminer a pour que g soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (4 points)

Calculer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+3}{x^2-5x+4}$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-2x}{2x+\sqrt{x^2+3}}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\mathrm{e}^x + x}{\mathrm{e}^x - x^2}$

d. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

Exercice 3 (6 points)

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.
   a. Étudier les variations de la fonction g.
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} à l'aide de la calculatrice.
   d. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \dfrac{2}{x^2+1}$.
   On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
   a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+1)\,g(x)}{(x^2+1)^2}$.
   c. À l'aide d'un tableau de signes, donner le signe de $f'(x)$.
   Dresser ensuite le tableau de variations de f.

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a. Déterminer les limites de u en $-\infty$ et en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
b. Montrer que $u(x) + 2x$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.
c. Montrer que $u'(x) = \dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$, puis en déduire les variations de u sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 1. Interpréter graphiquement.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra écrire, pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \times \dfrac{x}{x-1}$.
4. Montrer que, pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{(x-2)\,\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$.
   Dresser ensuite le tableau de variations de f.