Chapitre 2. Fiche d'exercices n°1

Limites de fonctions et asymptotes

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Donner, sans justification, les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5$

c. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x}$

d. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x^2}$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x$

Exercice 2 ⋆

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 7$.

Exercice 3 ⋆

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^2 - x}{2x^2 + 3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x + 1}{x^3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 - 1}{2x + 5}$.

Exercice 4 ⋆

Une fonction f vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$. Que peut-on dire de la courbe de f ?

Exercice 5 ⋆

Déterminer $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ et $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 6 ⋆⋆

Soit $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis interpréter.

b. Déterminer les limites de f à gauche et à droite de -2, puis interpréter.

Exercice 7 ⋆⋆

Déterminer les limites de $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$ en 3^+, 3^-, $(-3)^+$ et $(-3)^-$. Commenter.

Exercice 8 ⋆⋆

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)$.

Exercice 9 ⋆⋆

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $f(x)=(3-x)\mathrm{e}^x$ et de $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+2}$.

Exercice 10 ⋆⋆

Déterminer, en précisant la composition utilisée : a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1-3x}{x}}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{9x^2+1}{x^2}}$ c. $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 11 ⋆⋆

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2\cos x\right)$.

Exercice 12 ⋆⋆

Soit $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}$. Déterminer toutes les asymptotes à la courbe de f.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{5}{2+3\mathrm{e}^{-x}}$.

a. Déterminer $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f$; en déduire deux asymptotes.

b. Montrer que pour tout réel x, $0<f(x)<\dfrac{5}{2}$.

c. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

Exercice 14 ⋆⋆⋆

Soit $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

a. Déterminer les réels a, b, c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

b. En déduire toutes les asymptotes de $\mathcal{C}_f$ et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'asymptote oblique.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Soit $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer $\lim_{-\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f$. Interpréter graphiquement la seconde.

b. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de f.

Exercice 16 ⋆⋆⋆

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x} + \dfrac{\sin x}{x}$.

a. Encadrer $f(x)$ à l'aide de deux fonctions simples pour $x > 0$.

b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 17 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$ et en déduire les asymptotes.

b. Montrer que f est impaire.

c. Montrer que $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$ et retrouver la limite en $+\infty$.

Exercice 18 ⋆⋆⋆⋆

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$.

Exercice 19 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$ définie sur $]0;+\infty[$.

a. Déterminer $\lim_{x\to0^+} f(x)$ (on utilisera $\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$).

b. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 20 ⋆⋆⋆⋆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

a. Déterminer $\lim_{+\infty} f$ et $\lim_{-\infty} f$.

b. Montrer que la droite $y = 2x$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et préciser la position relative.