CONTINUITÉ et TVI

Continuité

- Continue en a : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- Continue sur I : courbe « sans lever le crayon »
- Dérivable $\Rightarrow$ continue (réciproque fausse)
- Polynômes, exp, ln, $\sqrt{\ }$, quotients : continues sur leur domaine

Théorème des valeurs intermédiaires

- f continue sur $[a;b]$, k entre $f(a)$ et $f(b)$
- $\Rightarrow$ il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$
- Existence seulement
- Toujours justifier la continuité d'abord

Cas strictement monotone

- f continue et strictement monotone sur $[a;b]$
- $\Rightarrow$ solution unique de $f(x) = k$
- Existence + unicité : rédaction type bac
- Intervalles ouverts : utiliser les limites

Encadrer une solution

- Balayage à la calculatrice (pas 0,1 puis 0,01)
- Dichotomie : couper l'intervalle en deux
- Choisir la moitié où f change de signe
- Un encadrement, jamais une valeur exacte

Python

```
while b - a > eps:
m = (a+b)/2
if f(a)*f(m) <= 0: b = m else: a = m
```

- Nombre d'étapes : $(b-a)/2^n < \varepsilon$

Suites et continuité

- $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n \to \ell$, f continue
- $\Rightarrow f(\ell) = \ell$ (point fixe)
- Résoudre $f(x) = x$ puis choisir la bonne racine
- Lien avec le chapitre 1

Chapitre 3 · Les trois réflexes : justifier la continuité ; existence ≠ unicité ; la dichotomie encadre.