Chapitre 3. Cours

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

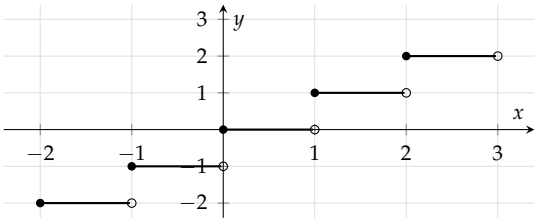
I. Continuité

1. Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **continue en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Elle est **continue sur** I lorsqu'elle est continue en tout point de I.

Interprétation graphique. Sur I, la courbe se trace sans lever le crayon.



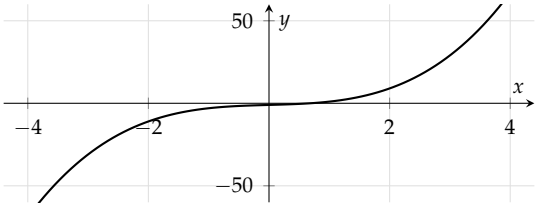
3.1 — Une fonction discontinue : la partie entière.

2. Fonctions usuelles

Théorème 3.2

Toute fonction dérivable sur un intervalle I y est continue.

Sont continues sur tout intervalle de leur ensemble de définition : les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles, la racine carrée, l'exponentielle, le logarithme, le sinus et le cosinus. Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues le sont également.



3.2 — La fonction $f(x) = x^3 + x - 1$, continue sur $\mathbb{R}$.

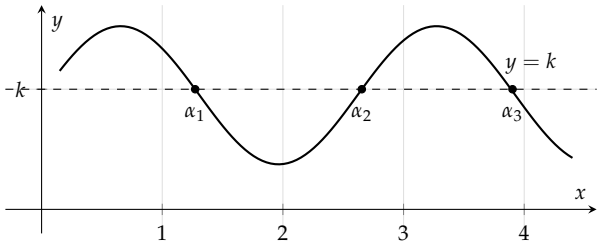
Attention

La réciproque du théorème 3.2 est **fausse** : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 sans y être dérivable. La courbe présente un point anguleux, pas une rupture.

Remarque — bon réflexe

Les fonctions définies par morceaux sont les seules dont la continuité pose réellement question. Aux points de raccord, on calcule les deux limites latérales et on les compare à la valeur de la fonction.

II. Théorème des valeurs intermédiaires



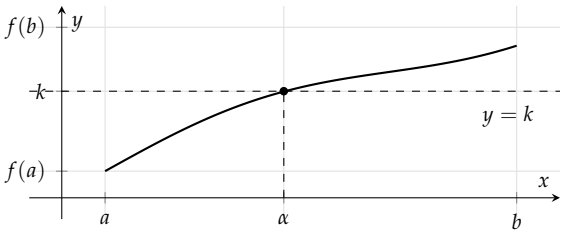
3.3 — Le théorème donne l'existence d'au moins une solution, ici trois.

Théorème 3.3 (valeurs intermédiaires)

Si f est continue sur $[a\,;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a\,;b]$.

Théorème 3.4 (corollaire, dit « de la bijection »)

Si de plus f est **strictement monotone** sur $[a\,;b]$, cette solution est **unique**.



3.4 — f strictement croissante : une solution et une seule.

Remarque — extension aux intervalles ouverts

Le théorème s'applique encore sur $]a\,;b[$, sur $[a\,;+\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les **limites aux bornes**.

Attention

Le théorème exige la continuité. Sans elle, la courbe peut « sauter » par-dessus la valeur k : l'équation n'a alors aucune solution, même si k est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Méthode — la rédaction attendue

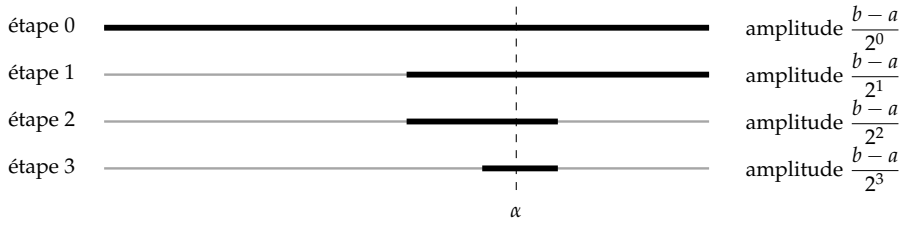
Trois éléments, systématiquement :

1. la **continuité** de f sur l'intervalle, justifiée ;
2. la **stricte monotonie**, lorsque l'unicité est demandée ;
3. l'**encadrement** de k par les valeurs ou les limites aux bornes.

Chacun vaut un point, et il en manque un dans la plupart des copies.

III. Méthode de dichotomie

Pour approcher la solution de $f(x) = 0$ sur $[a\,;b]$, où f change de signe, on coupe l'intervalle en deux à chaque étape et l'on conserve la moitié où le changement de signe subsiste.



3.5 — À chaque étape, l'amplitude de l'encadrement est divisée par deux.

Propriété

Après n étapes, l'amplitude de l'encadrement vaut $\dfrac{b-a}{2^n}$.

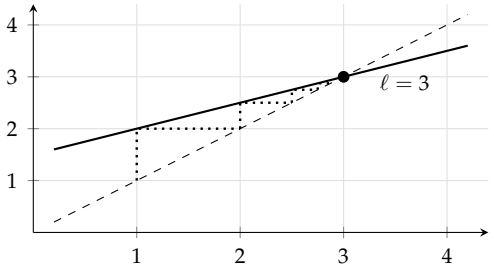
Exemple

Pour obtenir une amplitude inférieure à 10^{-3} sur $[0\,;1]$, il faut $\dfrac{1}{2^n} < 10^{-3}$, soit $2^n > 1000$, c'est-à-dire $n \geqslant 10$.

Remarque — astuce

Chaque étape gagne un facteur 2, et $2^{10} \approx 10^3$: dix étapes gagnent trois décimales. Ce repère permet de répondre de tête à la plupart des questions de précision.

IV. Suites définies par récurrence et point fixe



3.6 — Point fixe : la limite vérifie $\ell = f(\ell)$.

Théorème 3.5 (point fixe)

Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f continue. Si (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ vérifie

$$f(\ell) = \ell.$$

Méthode — marche à suivre complète

1. Démontrer que la suite est bornée — le plus souvent par récurrence.
2. Démontrer qu'elle est monotone.
3. Conclure à la convergence par le théorème de la limite monotone.
4. Résoudre $f(\ell) = \ell$ et choisir la racine compatible avec l'encadrement.

Attention

Résoudre $f(\ell) = \ell$ sans avoir prouvé la convergence. L'équation du point fixe donne les *candidats*, pas l'existence de la limite : une suite divergente peut très bien admettre un point fixe.

Remarque — bon réflexe

Quand l'équation $f(\ell) = \ell$ a plusieurs solutions, l'encadrement établi à l'étape 1 tranche. C'est aussi à cela qu'il sert, au-delà de la convergence.

MÉTHODES

Méthode 1 — Appliquer le TVI pour prouver l'existence

1. Justifier la continuité de f sur l'intervalle, en invoquant les opérations sur les fonctions usuelles.
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$, ou les limites si l'intervalle est ouvert.
3. Vérifier que k est compris entre ces deux valeurs.
4. Conclure : « d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation admet au moins une solution ».

Attention

Écrire « f est continue » sans le justifier. Un mot suffit — « somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ » — mais il doit y être.

Méthode 2 — Obtenir l'unicité

1. Reprendre les trois points de la méthode 1.
2. Calculer f' et établir son signe constant sur l'intervalle.
3. En déduire la stricte monotonie.
4. Conclure au caractère unique de la solution.

Remarque — bon réflexe

Une dérivée positive qui s'annule en des points isolés laisse la stricte monotonie. Dites-le explicitement : c'est un demi-point à chaque fois.

Méthode 3 — Encadrer par dichotomie

1. Vérifier que f change de signe entre a et b.
2. Calculer $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ et conserver la moitié où le changement subsiste.
3. Recommencer jusqu'à l'amplitude demandée.
4. Pour une amplitude ε, le nombre d'étapes vérifie $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$.

Exemple éclair

Sur $[1\,;2]$, atteindre 10^{-2} demande $2^n > 100$, soit $n = 7$.

Méthode 4 — Déterminer la limite d'une suite récurrente

1. Conjecturer l'encadrement et la monotonie sur les premiers termes.
2. Démontrer l'encadrement par récurrence.
3. Démontrer la monotonie, par récurrence ou par le signe de $u_{n+1} - u_n$.
4. Conclure à la convergence par le théorème de la limite monotone.
5. Résoudre $f(\ell) = \ell$ et retenir la racine compatible avec l'encadrement.

Remarque — astuce

Les étapes 2 et 3 se démontrent souvent d'un seul coup, par une récurrence portant sur la proposition « $a \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant b$ ».

Méthode 5 — Étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

1. Sur chaque morceau ouvert, la continuité découle des fonctions usuelles.
2. Aux points de raccord a, calculer $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
3. Comparer ces deux limites à $f(a)$.
4. Conclure : la continuité exige l'égalité des trois valeurs.

Remarque — bon réflexe

Quand un paramètre apparaît dans l'expression, l'égalité des trois valeurs fournit une équation qui le détermine. C'est la forme la plus fréquente de la question.

Méthode 6 — Localiser une solution à l'aide d'un tableau de variations

Quand ? L'énoncé demande le nombre de solutions de $f(x) = k$ sur un intervalle, sans les calculer.

1. Dresser le tableau de variations complet, limites aux bornes comprises.
2. Repérer les intervalles où f est strictement monotone.
3. Sur chacun, comparer k aux valeurs atteintes aux extrémités.
4. Compter une solution par intervalle où k est encadré, aucune sinon.

Remarque — astuce

Le tableau de variations *est* la démonstration : chaque flèche monotone représente une application du corollaire. Il suffit de dire, pour chaque branche, si k y est atteint.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Erreur	Bon réflexe
Appliquer le TVI sans justifier la continuité	C'est l'hypothèse qui fait tout le théorème
Conclure à l'unicité avec le TVI seul	Il faut la stricte monotonie
Croire que continuité entraîne dérivabilité	$\lvert x \rvert$ en 0 : continue, non dérivable
Écrire $f(a) \times f(b) < 0$ sans le dire	Formulation acceptée, mais il faut annoncer que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$
Passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ sans continuité	Théorème 3.5, hypothèse à citer
Donner α au lieu d'un encadrement	La dichotomie fournit un encadrement, non une valeur exacte

Module Python — dichotomie

```
# Dichotomie :  encadrement d'une solution de f(x) = 0
def f(x):
  return x ** 3 + x - 1
def dichotomie(a, b, precision):
  # f(a) et f(b) sont de signes contraires
  etape = 0
  while b - a > precision:
    m = (a + b) / 2
    if f(a) * f(m) <= 0:
      b = m
    else:
      a = m
    etape = etape + 1
    print("etape", etape, ":  [", round(a, 6), ";", round(b, 6), "]")
  return a
```

Exemple — trace d'exécution

Sur l'intervalle $[0\,;1]$, avec une précision de 0,01 : étape 1 : $[0{,}5\,;1]$ étape 2 : $[0{,}5\,;0{,}75]$ étape 3 : $[0{,}625\,;0{,}75]$ étape 4 : $[0{,}625\,;0{,}6875]$
étape 5 : $[0{,}65625\,;0{,}6875]$ étape 6 : $[0{,}671875\,;0{,}6875]$ étape 7 : $[0{,}679688\,;0{,}6875]$

Remarque — interprétation mathématique

L'amplitude est exactement divisée par 2 à chaque étape : 1 ; 0,5 ; 0,25… soit $\dfrac{1}{2^n}$. Sept étapes suffisent pour descendre sous 0,01, ce qui se prévoit sans calcul : $\dfrac{1}{2^7} = 0{,}0078 < 0{,}01$ tandis que $\dfrac{1}{2^6} = 0{,}0156 > 0{,}01$. La valeur exacte est $\alpha \approx 0{,}682328$, bien contenue dans l'encadrement obtenu. L'algorithme ne donne jamais α : il fournit un encadrement aussi fin qu'on veut, ce qui est précisément ce que le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer.

Les trois réflexes du chapitre

1. Continuité d'abord. Toujours la justifier avant d'invoquer le théorème des valeurs intermédiaires : c'est l'hypothèse qui fait tout.

2. Existence n'est pas unicité. Le théorème donne l'existence ; c'est la stricte monotonie qui donne l'unicité.

3. La dichotomie encadre. Elle fournit un encadrement, jamais une valeur exacte : chaque étape divise l'amplitude par deux.

Suites récurrentes. Bornée, monotone, donc convergente — puis $f(\ell) = \ell$ pour la limite, jamais l'inverse.

CONTINUITÉ et TVI

Continuité

- Continue en a : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- Continue sur I : courbe « sans lever le crayon »
- Dérivable $\Rightarrow$ continue (réciproque fausse)
- Polynômes, exp, ln, $\sqrt{\ }$, quotients : continues sur leur domaine

Théorème des valeurs intermédiaires

- f continue sur $[a;b]$, k entre $f(a)$ et $f(b)$
- $\Rightarrow$ il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$
- Existence seulement
- Toujours justifier la continuité d'abord

Cas strictement monotone

- f continue et strictement monotone sur $[a;b]$
- $\Rightarrow$ solution unique de $f(x) = k$
- Existence + unicité : rédaction type bac
- Intervalles ouverts : utiliser les limites

Encadrer une solution

- Balayage à la calculatrice (pas 0,1 puis 0,01)
- Dichotomie : couper l'intervalle en deux
- Choisir la moitié où f change de signe
- Un encadrement, jamais une valeur exacte

Python

```
while b - a > eps:
m = (a+b)/2
if f(a)*f(m) <= 0: b = m else: a = m
```

- Nombre d'étapes : $(b-a)/2^n < \varepsilon$

Suites et continuité

- $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_n \to \ell$, f continue
- $\Rightarrow f(\ell) = \ell$ (point fixe)
- Résoudre $f(x) = x$ puis choisir la bonne racine
- Lien avec le chapitre 1

Chapitre 3 · Les trois réflexes : justifier la continuité ; existence ≠ unicité ; la dichotomie encadre.