Chapitre 3. Fiche d'exercices n°1

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Vrai ou faux ? Justifier.

a. Toute fonction continue sur un intervalle y est dérivable.

b. Toute fonction dérivable sur un intervalle y est continue.

c. Une fonction continue sur $[a;b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ s'annule au moins une fois sur $]a;b[$.

d. Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, l'équation $f(x) = k$ a au plus une solution.

Exercice 2 ⋆

Soit f définie par $f(x) = 3x - 1$ si $x \leqslant 2$ et $f(x) = x^2 + a$ si $x > 2$. Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 ⋆

f est continue et strictement croissante sur $[0;5]$ avec $f(0) = -3$ et $f(5) = 7$. Combien l'équation $f(x) = 2$ admet-elle de solutions ? Et l'équation $f(x) = 9$?

Exercice 4 ⋆

Soit $g(x) = x^3 + x - 3$. Vérifier que $g(1) < 0 < g(2)$ et en déduire l'existence d'une solution de $g(x) = 0$ dans $]1;2[$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 5 ⋆⋆

Soit $f(x) = x^3 - 6x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

a. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations (avec les limites).

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur $\mathbb{R}$.

c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune d'elles.

Exercice 6 ⋆⋆

Soit $f(x) = x^3 + 3x - 5$. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, puis déterminer un encadrement de α à 10^{-2}.

Exercice 7 ⋆⋆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

a. Justifier que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

c. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α, puis donner un encadrement de α à 10^{-2}.

Exercice 8 ⋆⋆

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ pour $x \neq 0$.

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b. Comment prolonger f par continuité en 0 ?

Exercice 9 ⋆⋆

Recopier et compléter le script Python ci-contre pour qu'il renvoie un encadrement d'amplitude `e` de la solution de $f(x) = 0$ sur $[a;b]$ par dichotomie, en supposant $f(a) < 0 < f(b)$.

```
def dicho(a, b, e):
  while b - a > e :
    m = ...
    if f(m) ...  0 :
      a = ...
    else :
      b = ...
  return a, b
```

Exercice 10 ⋆⋆

En partant de l'intervalle $[1;2]$, combien d'étapes de dichotomie faut-il pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-3} ? Justifier.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$.

a. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$ (limites comprises).

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}2$ admet exactement deux solutions sur $[0;+\infty[$.

c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune.

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. On admet que (u_n) est croissante et majorée par 4.

a. Justifier que (u_n) converge vers un réel ℓ.

b. En utilisant la continuité de $x \mapsto \sqrt{3x+4}$, déterminer ℓ.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ sur $[-3;4]$.

a. Dresser le tableau de variations de f sur $[-3;4]$.

b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-3;4]$, en justifiant sur chaque intervalle de monotonie.

Exercice 14 ⋆⋆⋆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Démontrer que pour tout réel k, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution.

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 15 ⋆⋆⋆⋆

Soit n un entier naturel non nul et f_n définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0;1]$.

b. Calculer α_1 et α_2 (valeur exacte).

c. Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \leqslant 0$ et en déduire que la suite (α_n) est croissante.

d. En déduire que (α_n) converge.

Exercice 16 ⋆⋆⋆⋆

Soit f continue sur $[0;1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On pose $g(x) = f(x) - x$. Démontrer que si $f\left(\frac{1}{2}\right) \neq \frac{1}{2}$, l'équation $f(x) = x$ admet quand même au moins une solution dans $[0;1]$. (Indication : que valent $g(0)$ et $g(1)$?)

Exercice 17 ⋆⋆⋆⋆

(Point fixe) Soit f continue sur $[0;1]$ et à valeurs dans $[0;1]$. On pose $h(x) = f(x) - x$. Montrer que $h(0) \geqslant 0$, $h(1) \leqslant 0$, puis qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 18 ⋆⋆⋆⋆

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 2$.

a. Dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha < 0 < \beta$.

c. Écrire un script Python renvoyant un encadrement de β d'amplitude 10^{-3}.