Chapitre 4. Cours

Combinatoire et dénombrement

1. Cardinal et principes de dénombrement

Compter sans énumérer : tout le chapitre tient dans ce programme. Deux principes suffisent — additionner des cas disjoints, multiplier des étapes successives — et quatre modèles de référence font le reste.



Figure 1 — Principe additif et principe multiplicatif.

Définition 4.1 — Cardinal

Le **cardinal** d'un ensemble fini E, noté $\mathrm{Card}(E)$, est son nombre d'éléments.

Propriété 4.2 — Principe additif

Si A et B sont disjoints : $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
Dans le cas général : $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Propriété 4.3 — Principe multiplicatif

Un choix en p **étapes successives**, offrant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_p$ possibilités, se fait de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ façons.

Exercice d'application 1

a. Un menu propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts. Combien de menus complets ?
b. Un club compte 15 footballeurs et 12 basketteurs, dont 5 pratiquent les deux sports. Combien de sportifs en tout ?

Solution.
a. Trois étapes successives : $3 \times 4 \times 2 = 24$ menus.
b. Les deux ensembles ne sont pas disjoints : $15 + 12 - 5 = 22$ sportifs.

Propriété 4.4 — Complémentaire

$$\mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

Exercice d'application 2

Combien de mots de 4 lettres (avec répétition autorisée) contiennent au moins un A ?

Solution. Le contraire de « au moins un A » est « aucun A ». On soustrait :

$$26^4 - 25^4 = 456\,976 - 390\,625 = 66\,351 \text{ mots.}$$

Remarque — Bon réflexe

« **Et** » appelle une multiplication, « **ou** » une addition. Cette traduction règle la moitié des exercices avant tout calcul.

2. Les quatre situations de référence

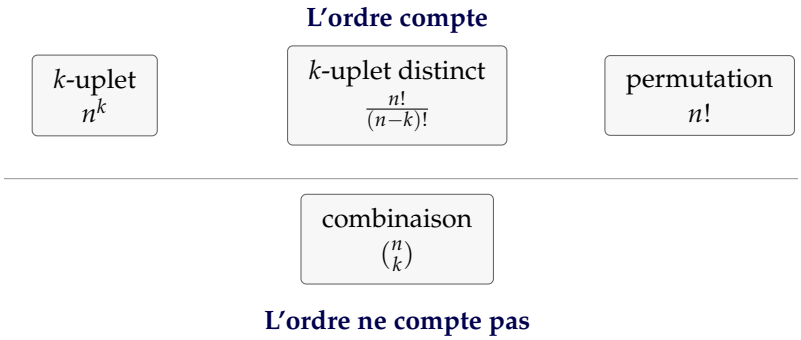


Figure 2 — Les quatre situations de référence.

Propriété 4.5 — Les quatre modèles

Dans un ensemble à n éléments, on prélève p éléments :

Situation	Ordre	Répétition	Nombre
p-uplet	oui	oui	n^p
p-uplet d'éléments distincts	oui	non	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$
Permutation $(p = n)$	oui	non	$n!$
Combinaison	non	non	$\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Exercice d'application 3

Dénombrer : a. les podiums possibles parmi 10 coureurs ; b. les comités de 3 personnes parmi 10 ; c. les codes de 4 chiffres.

Solution.
a. Ordre oui, répétition non : $10 \times 9 \times 8 = 720$ podiums.
b. Ordre non : $\dbinom{10}{3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$ comités.

c. Ordre oui, répétition oui : $10^4 = 10\,000$ codes.

Remarque — Identifier le bon modèle

1. L'ordre compte-t-il ? Un podium oui, un comité non.
2. Peut-on répéter un élément ? Un code oui, un tirage simultané non.
3. Croiser les deux réponses dans le tableau.

Attention — Erreur à éviter

Confondre arrangement et combinaison. « Choisir un président **et** un trésorier » ordonne les rôles ; « choisir deux délégués » ne les ordonne pas. Le rapport entre les deux comptes est exactement $p!$.

3. Propriétés des coefficients binomiaux

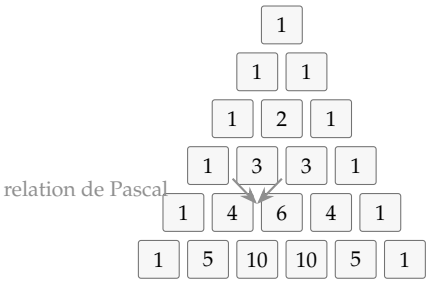


Figure 3 — Le triangle de Pascal : chaque coefficient est la somme des deux du dessus.

Théorème 4.6 — Valeurs particulières et symétrie

Pour $0 \leqslant p \leqslant n$:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Exercice d'application 4

Calculer $\binom{20}{18}$ ***sans calculatrice.***

Solution. Par symétrie :

$$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = 190.$$

Théorème 4.7 — Relation de Pascal

Pour $0 \leqslant p < n$:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Interprétation. Pour former une partie à $p+1$ éléments parmi $n+1$, on distingue selon qu'elle contient ou non un élément fixé : c'est la démonstration par dénombrement.

Exercice d'application 5

Vérifier la relation de Pascal sur $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$.

Solution. $\binom{5}{2} = 10$ et $\binom{5}{3} = 10$, et en effet :

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20 = \binom{6}{3},$$

comme le montre la figure 3, ligne $n = 5$ vers la ligne suivante.

Remarque — Astuce

La symétrie $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ divise les calculs par deux. Pour $\binom{20}{18}$, calculez $\binom{20}{2} = 190$: trois secondes au lieu de trois minutes.

4. Somme des coefficients binomiaux

Théorème 4.8 — Somme d'une ligne du triangle

Pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n.$$

Démonstration — par dénombrement

Un ensemble à n éléments possède 2^n parties, chacune obtenue en décidant pour chaque élément s'il y figure. En les classant par cardinal, on retrouve la somme. ■

Exercice d'application 6

Combien un ensemble à 6 éléments possède-t-il de parties ? De parties non vides ?

Solution. Il possède $2^6 = 64$ parties — c'est la somme de la ligne $n = 6$ du triangle.
En retirant l'ensemble vide : $64 - 1 = 63$ parties non vides.

Remarque — Bon réflexe

Cette identité se lit sur le triangle de Pascal : la somme de chaque ligne double à chaque étage. C'est le contrôle le plus rapide d'un triangle recopié.

5. Approfondissements facultatifs

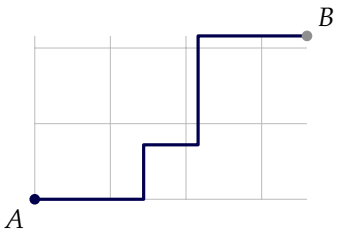


Figure 4 — Chemins sur un quadrillage : chaque trajet est un mot. Ici $\binom{8}{3} = 56$ chemins, en choisissant la place des 3 montées parmi 8 pas.

Remarque — Pour aller plus loin

Le **binôme de Newton** $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}$ et la méthode des **étoiles et barres** dépassent les attendus du baccalauréat. Ils éclairent le chapitre sans être exigibles.

Méthodes

Méthode 1 — Choisir le bon modèle

1. Identifier l'ensemble de départ et son cardinal n.
2. Déterminer combien d'éléments on prélève : p.
3. L'ordre compte-t-il ? Peut-on répéter ?
4. Appliquer la formule correspondante, et **justifier le choix** en une phrase.

Exemple éclair. Un podium parmi 10 coureurs : ordre oui, répétition non, donc $10 \times 9 \times 8 = 720$.
Bon réflexe. La phrase de justification vaut autant que le calcul. Écrivez « il s'agit d'une combinaison, l'ordre du comité étant sans importance » : c'est un point de barème à chaque question.

Méthode 2 — Dénombrer par le complémentaire

Quand ? L'énoncé contient « **au moins un** ». Compter directement obligerait à distinguer un, deux, trois cas…

1. Compter le **total** sans contrainte.
2. Compter les cas **contraires** — « au moins un » a pour contraire « aucun ».
3. Soustraire.
4. Vérifier la vraisemblance : le résultat doit être inférieur au total.

Exemple éclair. Mots de 4 lettres avec au moins un A : $26^4 - 25^4 = 66\,351$.
Astuce. « Au moins un » → contraire « aucun ». « Au plus deux » → contraire « au moins trois ». Le passage au complémentaire transforme presque toujours une somme de cas en une seule soustraction.

Méthode 3 — Utiliser la relation de Pascal

1. Repérer deux coefficients de même « étage » n et de rangs consécutifs.
2. Appliquer $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Pour une démonstration, revenir aux factorielles et réduire au même dénominateur.
4. Pour un calcul, s'appuyer sur le triangle plutôt que sur les factorielles.

Exemple éclair. $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20 = \binom{6}{3}$.
Bon réflexe. La relation de Pascal est l'outil des démonstrations par récurrence sur les coefficients binomiaux : elle relie l'étage n à l'étage $n+1$.

Méthode 4 — Dénombrer avec contrainte de composition

Quand ? On impose la composition du prélèvement : « exactement deux rouges », « trois femmes et deux hommes ».
1. Séparer la population en catégories.
2. Choisir dans chaque catégorie indépendamment.
3. **Multiplier** les nombres obtenus — c'est un « et ».
4. Si plusieurs compositions conviennent, additionner les cas.

Exemple éclair. Exactement 2 rouges parmi 5 rouges et 4 bleues, en tirant 3 boules : $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$.
Erreur à éviter. Oublier de choisir dans la seconde catégorie. Tirer trois boules dont exactement deux rouges impose aussi de choisir la troisième parmi les bleues : le facteur $\binom{4}{1}$ n'est pas facultatif.

Méthode 5 — Dénombrer avec contrainte de regroupement

Quand ? Certains éléments doivent rester ensemble, ou au contraire être séparés.
1. Traiter le groupe imposé comme un **élément unique**.
2. Permuter les objets ainsi obtenus.
3. Multiplier par les permutations **internes** au groupe.
4. Pour une séparation imposée, passer par le complémentaire.

Exemple éclair. Trois personnes devant rester côte à côte parmi six : on permute 4 objets, soit 4!, puis les trois entre elles, soit 3!. Total $4! \times 3! = 144$.
Bon réflexe. L'oubli des rangements internes est l'erreur classique de cette méthode : le groupe n'est pas figé, il est seulement solidaire.

Méthode 6 — Compter des chemins

Quand ? Déplacements sur une grille, arbres de choix, mots formés de deux lettres répétées.
1. Traduire chaque chemin en une **suite de symboles** — par exemple D pour droite, H pour haut.
2. Constater que tous les chemins ont la **même longueur**.
3. Compter revient à choisir les positions d'un des deux symboles : $\binom{n}{p}$.
4. Pour un passage imposé, découper le trajet et multiplier ; pour un point interdit, passer au complémentaire.

Exemple éclair. Sur la grille de la figure 4, chaque trajet est un mot de 8 lettres à 3 H : $\binom{8}{3} = 56$ chemins.
Bon réflexe. Cette méthode est le pont vers le chapitre 7 : compter les chemins d'un arbre menant à k succès parmi n répétitions, c'est exactement $\binom{n}{k}$.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Erreur	Bon réflexe
Confondre $\binom{n}{k}$ et $\frac{n!}{(n-k)!}$	Le coefficient binomial **divise en plus** par $k!$: il efface l'ordre
Appliquer une formule sans décrire un résultat	Méthode 1, étape 1, toujours
Compter « au moins un » directement	Passer par le complémentaire
Additionner quand il faut multiplier	On **additionne** des cas disjoints, on **multiplie** des étapes successives
Oublier les rangements internes d'un bloc	Méthode 5, étape 3
Écrire $\binom{n}{k}$ pour $k > n$	Ce coefficient vaut 0 : on ne peut pas choisir plus d'éléments qu'il n'y en a

Module Python — triangle de Pascal et combinaisons

```
# Triangle de Pascal et combinaisons
def triangle_pascal(n_max):
   # construction ligne par ligne avec la relation de Pascal
   ligne = [1]
   for n in range(n_max + 1):
      print("n =", n, ":", ligne, " somme =", sum(ligne))
      nouvelle = [1]
      for i in range(len(ligne) - 1):
         nouvelle.append(ligne[i] + ligne[i + 1])
      nouvelle.append(1)
      ligne = nouvelle
def combinaison(n, p):
   # calcul par la formule multiplicative, sans factorielle
   resultat = 1
   for i in range(p):
      resultat = resultat * (n - i) // (i + 1)
   return resultat
triangle_pascal(6)
print()
print("C(5, 3) =", combinaison(5, 3), " C(10, 4) =", combinaison(10,
4))
print("C(49, 6) =", combinaison(49, 6), "(grilles du loto)")
```

Trace d'exécution.

```
n = 0 :  [1] somme = 1
n = 1 :  [1, 1] somme = 2
n = 2 :  [1, 2, 1] somme = 4
n = 3 :  [1, 3, 3, 1] somme = 8
n = 4 :  [1, 4, 6, 4, 1] somme = 16
n = 5 :  [1, 5, 10, 10, 5, 1] somme = 32
n = 6 :  [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1] somme = 64
C(5, 3) = 10 C(10, 4) = 210
C(49, 6) = 13983816 (grilles du loto)
```

Interprétation mathématique. La colonne des sommes donne $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$, soit 2^n : c'est la vérification numérique du théorème 4.8. La seconde partie calcule des combinaisons par la **formule multiplicative**, sans jamais former de factorielle : on obtient $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$, le nombre de grilles du loto, en une boucle de six produits.

Attention

La fonction *triangle_pascal* n'emploie **aucune factorielle** : elle n'utilise que la relation de Pascal. C'est ainsi que les coefficients binomiaux se calculent en pratique, les factorielles devenant vite gigantesques.