Chapitre 4. Fiche d'exercices n°1

Dénombrement et combinatoire

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Un cadenas à numéros possède trois roulettes portant chacune les chiffres de 0 à 9.

a. Combien de « nombres » secrets différents peut-on former ?
b. Combien d'entre eux ont trois chiffres deux à deux distincts ?
c. Combien commencent par le chiffre 7 ?

Exercice 2 ⋆

On lance deux dés à six faces, l'un rouge et l'autre vert.

a. Combien de couples de résultats peut-on obtenir ?
b. Combien de ces couples ont une somme égale à 7 ?
c. Si les deux dés étaient indiscernables, combien de résultats différents pourrait-on observer ?

Exercice 3 ⋆

D'un jeu de 52 cartes, on tire deux cartes. De combien de manières différentes est-ce possible

a. si les deux cartes sont tirées simultanément ?
b. si elles sont tirées successivement et sans remise ?
c. si elles sont tirées successivement avec remise ?

Exercice 4 ⋆

Calculer sans calculatrice, puis vérifier à la calculatrice :

$$\frac{7!}{5!}\,;\quad \binom{6}{2}\,;\quad \binom{8}{5}\,;\quad A_7^3\,;\quad \binom{20}{18}\,;\quad \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \text{ pour un entier } n \geqslant 1.$$

Exercice 5 ⋆

La façade d'une maison compte 8 fenêtres ; chaque fenêtre peut être ouverte ou fermée.

a. De combien de manières différentes la façade peut-elle se présenter ?
b. Même question si chaque fenêtre possède deux battants, chacun pouvant être ouvert ou fermé.
c. On revient aux fenêtres à un battant. Combien de façades sont possibles si la première fenêtre est toujours ouverte et la sixième toujours fermée ?

Exercice 6 ⋆

Combien de « mots » de 10 lettres (ayant un sens ou non) peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet

a. si chaque lettre est utilisée au plus une fois ?
b. si l'on peut réutiliser les lettres ?

Exercice 7 ⋆

Combien existe-t-il de nombres entiers à 6 chiffres (le premier chiffre étant non nul)

a. sans aucune restriction ?
b. divisibles par 5 ?
c. dont les six chiffres sont deux à deux distincts ?

Exercice 8 ⋆

De combien de manières peut-on placer 5 personnes
a. sur une ligne (sur cinq chaises alignées) ?
b. autour d'une table ronde, si seule la position relative des personnes les unes par rapport aux autres importe ?

Exercice 9 ⋆

Dans un groupe de 20 personnes, chacun serre la main de tous les autres.
a. Combien de poignées de main sont échangées ?
b. Dans un autre groupe, on a compté 66 poignées de main. Combien ce groupe compte-t-il de personnes ?

Exercice 10 ⋆

Pour jouer à l'Euro Millions, on coche 5 numéros parmi 50 et 2 « étoiles » parmi 11. Combien de grilles différentes peut-on remplir ?

Exercice 11 ⋆

Une boîte contient 12 boules discernables : 3 rouges, 4 bleues et 5 jaunes. On tire simultanément 3 boules.
a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
b. Combien de tirages contiennent une boule de chaque couleur ?
c. Combien de tirages ne contiennent que des boules jaunes ?
d. Combien de tirages contiennent au moins une boule rouge ?

Exercice 12 ⋆

a. Écrire la ligne $n = 7$ du triangle de Pascal et vérifier que la somme de ses termes vaut 2^7.
b. Vérifier sur cette ligne la relation de Pascal $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.
c. Sans calcul, justifier que $\binom{7}{5} = \binom{7}{2}$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 13 ⋆⋆

À partir d'un groupe de 5 femmes et de 7 hommes, on forme un comité de 2 femmes et 3 hommes.
a. Combien de comités différents peut-on former ?
b. Deux des hommes s'entendent mal et refusent de siéger ensemble. Combien reste-t-il de comités possibles ?

Exercice 14 ⋆⋆

On veut former un comité de 7 personnes comprenant 2 républicains, 2 démocrates et 3 indépendants, choisis parmi 5 républicains, 6 démocrates et 4 indépendants. De combien de manières peut-on procéder ?

Exercice 15 ⋆⋆

Un groupe de 12 personnes doit être partagé en deux groupes de 6 personnes.
a. Un groupe partira en Inde et l'autre au Brésil. Combien y a-t-il de manières d'organiser les voyages ?
b. Les deux groupes font finalement le même voyage, dans deux minibus identiques. Combien y a-t-il de façons de former les deux groupes ?

Exercice 16 ⋆⋆

Un groupe est formé de 10 hommes, 8 femmes et 7 enfants. De combien de manières différentes peut-on les placer sur une ligne

a. s'ils se placent librement ?
b. si les hommes désirent rester groupés ?

On donnera les résultats sous forme de produits de factorielles, puis une valeur approchée.

Exercice 17 ⋆⋆

Omar range 10 livres sur un rayon de sa bibliothèque : 4 livres de mathématiques, 3 de chimie, 2 d'histoire et 1 de langue, tous différents. Il souhaite que les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Exercice 18 ⋆⋆

De combien de manières peut-on asseoir sur une ligne 4 garçons et 3 filles

a. sans contrainte ?
b. si les garçons doivent rester ensemble et les filles aussi ?
c. si seuls les garçons doivent rester ensemble ?
d. si deux personnes de même sexe ne doivent jamais être voisines ?

Exercice 19 ⋆⋆

Un mot de passe comporte 6 caractères choisis parmi les 26 lettres majuscules et les 10 chiffres.

a. Combien de mots de passe peut-on former ?
b. Combien contiennent au moins un chiffre ?
c. Combien contiennent exactement un chiffre ?

Exercice 20 ⋆⋆

Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire 3 boules.

a. Combien y a-t-il de tirages successifs avec remise ? successifs sans remise ? simultanés ?
b. Parmi les tirages successifs sans remise, combien donnent trois numéros dans l'ordre strictement croissant ? Expliquer le lien avec la question précédente.

Exercice 21 ⋆⋆

Dix coureurs disputent une finale ; on suppose qu'il n'y a pas d'ex æquo.

a. Combien de podiums (or, argent, bronze) sont possibles ?
b. Combien de classements complets sont possibles ? Parmi eux, combien placent le coureur A devant le coureur B ?

Exercice 22 ⋆⋆

Un QCM comporte 10 questions ; chaque question propose 4 réponses dont une seule est exacte, et l'élève coche exactement une réponse par question.

a. Combien de grilles de réponses différentes peut-on remplir ?
b. Combien de grilles comportent exactement 8 bonnes réponses ?
c. Combien de grilles comportent au moins 9 bonnes réponses ?

Exercice 23 ⋆⋆

Un domino est une pièce portant deux nombres de points (de 0 à 6), éventuellement égaux ; les dominos $[2\,|\,5]$ et $[5\,|\,2]$ sont la même pièce.

a. Combien y a-t-il de dominos dans un jeu complet ?
b. Combien de dominos ont un total de 6 points ?
c. Combien de pièces compterait un jeu « double-neuf », dont les points vont de 0 à 9 ?

Exercice 24 ⋆⋆

Soit E un ensemble à 8 éléments et a un élément de E. Déterminer le nombre

a. de parties de E ;
b. de parties de E à 3 éléments ;
c. de parties de E contenant a ;
d. de parties de E à 3 éléments contenant a ;
e. de parties de E ayant un nombre pair d'éléments.

Série C ⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 25 ⋆⋆⋆

Un *anagramme* d'un mot est un mot (ayant un sens ou non) obtenu en permutant ses lettres.

a. Combien le mot `MATHS` possède-t-il d'anagrammes ?
b. Combien le mot `ANANAS` possède-t-il d'anagrammes ? On pourra choisir d'abord les positions des trois lettres `A`, puis celles des deux lettres `N`.
c. En déduire une formule pour le nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres comportant n_1 fois une première lettre, n_2 fois une deuxième, ..., et l'appliquer à `MISSISSIPPI`.

Exercice 26 ⋆⋆⋆

a. Combien de nombres différents à quatre chiffres peut-on écrire en utilisant exactement les chiffres 3, 3, 5 et 0 ?
b. Combien d'entre eux sont pairs ?

Exercice 27 ⋆⋆⋆

Un enfant possède 12 cahiers : 6 noirs, 4 rouges, 1 blanc et 1 bleu ; deux cahiers de même couleur sont indiscernables. Il range ses cahiers en pile en tenant à ce que tous les cahiers noirs soient les uns au-dessus des autres. De combien de manières peut-il procéder ? Que devient ce nombre si les cahiers sont tous discernables ?

Exercice 28 ⋆⋆⋆

a. Montrer que le nombre de façons de placer n personnes autour d'une table ronde (seules les positions relatives comptent) est $(n-1)!$.
b. Six amis s'installent autour d'une table ronde. Combien y a-t-il de dispositions dans lesquelles Alice et Bruno sont voisins ?

Exercice 29 ⋆⋆⋆

Au poker à 32 cartes (quatre couleurs, huit hauteurs : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as), une main est un ensemble de 5 cartes.

a. Combien y a-t-il de mains ?
b. Combien de mains contiennent un *carré* (quatre cartes de même hauteur) ?
c. Combien de mains sont un *full* (trois cartes d'une hauteur et deux d'une autre) ?
d. Combien de mains sont formées de cinq cartes de la même couleur ?

Exercice 30 ⋆⋆⋆

a. Montrer qu'un polygone convexe à n côtés ($n \geqslant 3$) possède $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Combien un décagone en a-t-il ?
b. On place 10 points dans le plan de sorte que trois quelconques d'entre eux ne soient jamais alignés. Combien de triangles ont leurs sommets parmi ces points ?
c. Même question si exactement 4 des 10 points sont alignés (et aucun autre triplet).

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Exercices très difficiles

Exercice 31 ⋆⋆⋆⋆

a. Le nombre d'atomes de l'Univers observable est estimé à 10^{80}. Combien de cartes devrait contenir un jeu pour que le nombre de façons de le mélanger dépasse cette valeur ? On explicitera la démarche (calculatrice ou programme).

b. Au bridge, les 52 cartes sont distribuées entre quatre joueurs qui en reçoivent 13 chacun. Montrer que le nombre de donnes possibles est $\dfrac{52!}{(13!)^4}$ et en donner un ordre de grandeur.

Exercice 32 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geqslant 1$ un entier et E un ensemble à n éléments. Dans un club de n membres, on forme un comité (de taille quelconque, non vide) et l'on désigne son président parmi les membres du comité.

a. En comptant de deux façons les comités de k membres munis d'un président, démontrer que, pour $1 \leqslant k \leqslant n$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

b. En comptant de deux façons tous les comités munis d'un président, démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

c. Vérifier ces deux identités pour $n = 5$.

Exercice 33 ⋆⋆⋆⋆

Soient p, q et n des entiers naturels avec $n \leqslant p+q$. Une assemblée compte p femmes et q hommes ; on y choisit un groupe de n personnes.

a. En classant les groupes selon leur nombre k de femmes, démontrer l'identité de Vandermonde : $\displaystyle\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$ (avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $b > a$).

b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

c. Application : avec 5 femmes et 7 hommes, détailler les groupes de 4 personnes selon leur nombre de femmes et retrouver $\binom{12}{4}$.

Exercice 34 ⋆⋆⋆⋆

Dans un quadrillage, on se déplace de l'origine $O(0\,;0)$ au point $M(6\,;4)$ par des pas d'une unité vers la droite (D) ou vers le haut (H).

a. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

b. Combien de chemins passent par le point $P(2\,;3)$?

c. Combien de chemins évitent le point $Q(3\,;2)$?

d. Combien de chemins passent par P et évitent Q ?

Exercice 35 ⋆⋆⋆⋆

a. De combien de façons peut-on répartir 12 élèves en trois équipes de 4 pour un tournoi, les équipes étant numérotées 1, 2 et 3 ? Et si les trois équipes ne sont pas numérotées ?

b. On distribue 10 bonbons identiques à quatre enfants. En représentant une distribution par un mot formé de 10 symboles • (les bonbons) et de 3 barres | (les séparations entre enfants), déterminer le nombre de distributions possibles, c'est-à-dire le nombre de solutions entières positives ou nulles de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$.

c. Combien de distributions donnent au moins un bonbon à chaque enfant ?