Chapitre 5. Cours

# Compléments sur la dérivation et convexité

Composée de fonctions · dérivée seconde · convexité · points d'inflexion · lecture graphique · inégalités

## 1. Rappels sur la dérivation

### Définition (nombre dérivé, tangente)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a \in I$. On dit que $f$ est **dérivable en** $a$ si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand $h$ tend vers 0. Cette limite est le **nombre dérivé** $f'(a)$ : c'est le **coefficient directeur de la tangente** $T_a$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a$, d'équation $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

**Dérivées usuelles**

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Validité |
|---|---|---|
| $k$ (constante) | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $mx+p$ | $m$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ |
| $\mathrm{e}^x$ | $\mathrm{e}^x$ | $\mathbb{R}$ |

**Opérations** ($u$, $v$ dérivables, $k$ réel)

| Fonction | Dérivée | Condition |
|---|---|---|
| $u+v$ | $u'+v'$ | |
| $ku$ | $ku'$ | |
| $uv$ | $u'v+uv'$ | |
| $\dfrac{1}{v}$ | $-\dfrac{v'}{v^2}$ | $v \neq 0$ |
| $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ | $v \neq 0$ |

### Propriété (dérivée et sens de variation)

Soit $f$ dérivable sur un intervalle $I$. Si $f' \geqslant 0$ sur $I$, alors $f$ est croissante sur $I$ ; si $f' \leqslant 0$ sur $I$, alors $f$ est décroissante sur $I$ (strictement si $f'$ ne s'annule qu'en des points isolés).

### Exercice d'application 1 (tangente)

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

.....

.....

.....

.....

**Exercice d'application 2** (opérations)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

**a.** $f(x) = (4x^2+3x)(5x-2)$ **b.** $g(x) = \dfrac{6x-5}{x^2+1}$ **c.** $h(x) = (3x+4)\,\mathrm{e}^x$

.....

.....

.....

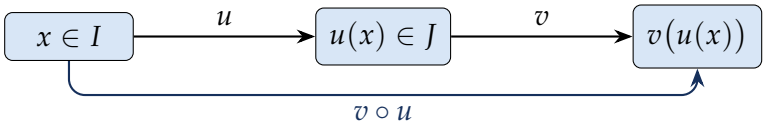
.....

.....

## 2. Dérivée d'une fonction composée

**Définition (composée de deux fonctions)**

Soit $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $v$ une fonction définie sur un intervalle $J$ telles que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. La **composée de $u$ suivie de $v$**, notée $v \circ u$ (on lit « $v$ rond $u$ »), est la fonction définie sur $I$ par $(v \circ u)(x) = v\big(u(x)\big)$.




**Exemple**

$h(x) = \sqrt{3x+1}$ : on calcule d'abord $u(x) = 3x+1$, puis on prend la racine $v(X) = \sqrt{X}$ ; donc $h = v \circ u$, définie lorsque $3x+1 \geqslant 0$. **L'ordre compte :** $(u \circ v)(x) = 3\sqrt{x}+1 \neq \sqrt{3x+1}$.

**Théorème (dérivée d'une composée — admis)**

Si $u$ est dérivable sur $I$, si $v$ est dérivable sur $J$ et si $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$, alors $v \circ u$ est dérivable sur $I$ et

$$\boxed{(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \big(v(u(x))\big)' = v'\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

**Conséquences : dérivées des composées usuelles** ($u$ dérivable sur $I$)

| Fonction | Dérivée | Condition | Exemple |
|---|---|---|---|
| $g(ax+b)$ | $a\,g'(ax+b)$ | | $\big(\mathrm{e}^{3x-1}\big)' = 3\,\mathrm{e}^{3x-1}$ |
| $\sqrt{u}$ | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $u > 0$ sur $I$ | $\big(\sqrt{x^2+1}\big)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $u^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ | $n\,u'\,u^{n-1}$ | $u \neq 0$ si $n < 0$ | $\big((x^2+1)^5\big)' = 5 \times 2x\,(x^2+1)^4 = 10x(x^2+1)^4$ |
| $\dfrac{1}{u}$ | $-\dfrac{u'}{u^2}$ | $u \neq 0$ sur $I$ | $\left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)' = -\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$ |
| $\mathrm{e}^u$ | $u'\,\mathrm{e}^u$ | | $\big(\mathrm{e}^{x^2}\big)' = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ |

Justification : avec $v(X) = \sqrt{X}$, on obtient $\big(\sqrt{u}\big)' = v'(u) \times u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$. *À compléter plus tard :* $\ln u$, $\cos u$, $\sin u$.

**Exercice d'application 3** (dériver une composée)

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas (on admet que les fonctions sont dérivables sur l'intervalle indiqué).

**a.** $f(x) = \sqrt{3x^2+4x-1}$ sur un intervalle où $3x^2+4x-1>0$ **b.** $f(x) = (2x^2+5x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$

**c.** $f(x) = \dfrac{1}{6x-7}$ sur $\left]\frac{7}{6};+\infty\right[$ **d.** $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exercice d'application 4** (étude d'une fonction)

Soit $f$ la fonction définie sur $I = \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x+1}}$.

**1.** Montrer que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{3x+2}{(3x+1)\sqrt{3x+1}}$. **2.** En déduire les variations de $f$ sur $I$.

**3.** Déterminer les limites de $f$ en $-\frac{1}{3}$ et en $+\infty$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## 3. Dérivée seconde

**Définition (dérivée seconde)**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. Si sa fonction dérivée $f'$ est elle-même dérivable sur $I$, on dit que $f$ est **deux fois dérivable** sur $I$ ; la dérivée de $f'$ est appelée **dérivée seconde** de $f$ et se note $f''$ :

$$f'' = (f')'.$$

**Exemple :** pour $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$ puis $f''(x) = 6x - 6$. **En physique :** si $x(t)$ est la position d'un mobile, $x'(t)$ est sa vitesse et $x''(t)$ son accélération.

**Exercice d'application 5** (dérivée seconde)

Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$. Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$ ; donner les résultats sous forme factorisée.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

## 4. Convexité d'une fonction

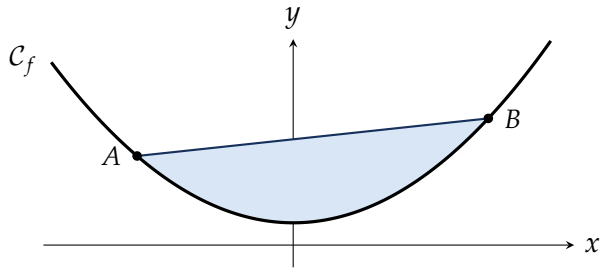
### 4.1 Définition par les sécantes

Une **sécante** à la courbe $\mathcal{C}_f$ est une droite qui passe par deux points $A$ et $B$ de $\mathcal{C}_f$. On regarde la position de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ par rapport au segment $[AB]$ : la courbe est « tournée vers le haut » comme une cuvette, ou « vers le bas » comme une bosse.

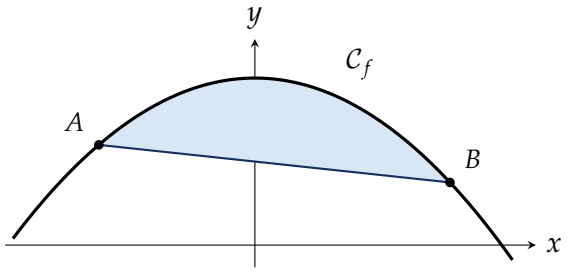
**Définition (fonction convexe, fonction concave)**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

- $f$ est **convexe** sur $I$ si, pour tous points $A$ et $B$ de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses dans $I$, l'arc de $\mathcal{C}_f$ compris entre $A$ et $B$ est situé **en dessous** du segment $[AB]$.
- $f$ est **concave** sur $I$ si, pour tous points $A$ et $B$ de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses dans $I$, l'arc de $\mathcal{C}_f$ compris entre $A$ et $B$ est situé **au-dessus** du segment $[AB]$.




*$f$ convexe : l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est sous la sécante $[AB]$.*

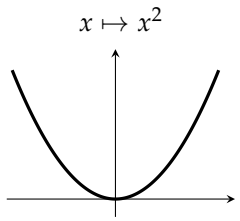



*$f$ concave : l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est au-dessus de la sécante $[AB]$.*

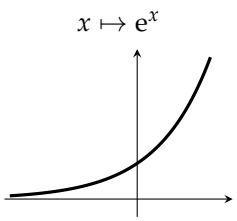
**Remarque**

$f$ est concave sur $I \iff -f$ est convexe sur $I$. Une fonction affine est à la fois convexe et concave. La définition n'exige pas la dérivabilité : $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

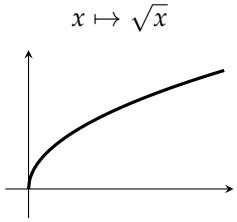
**Fonctions de référence.**



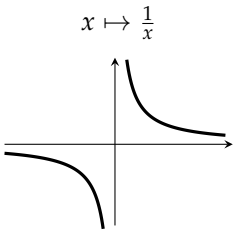

convexe sur $\mathbb{R}$




convexe sur $\mathbb{R}$




concave sur $[0;+\infty[$




concave sur $]-\infty;0[$
convexe sur $]0;+\infty[$

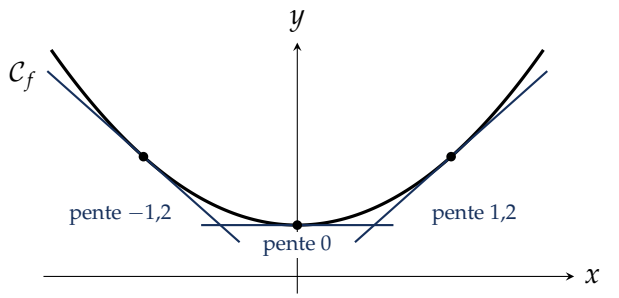
## 4.2 Caractérisation par les tangentes et par les dérivées

**Théorème (admis)**

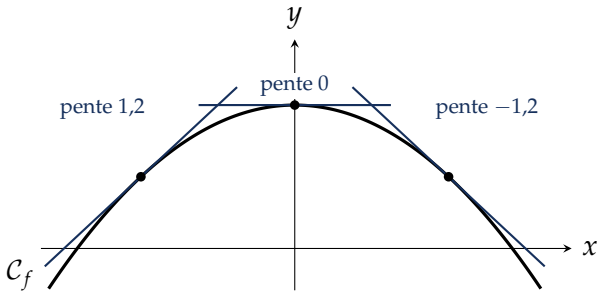
Soit $f$ une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle $I$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

$f$ est **convexe** sur $I$ $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de chacune de ses tangentes sur $I$ $\leftrightarrow$ $f'$ est **croissante** sur $I$ $\leftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$ sur $I$ ($f''$ positive)

De même, $f$ est **concave** sur $I \iff \mathcal{C}_f$ est **en dessous** de ses tangentes $\iff f'$ est **décroissante** sur $I \iff f'' \leqslant 0$ sur $I$.




*$f$ convexe : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes, dont les pentes $f'(a)$ augmentent quand $a$ augmente.*




*$f$ concave : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses tangentes, dont les pentes $f'(a)$ diminuent quand $a$ augmente.*

**Démonstration (au programme) — si $f'' \geqslant 0$ sur $I$, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes**

Soit $a \in I$ et $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a$. Pour comparer $\mathcal{C}_f$ et $T_a$, on étudie le signe de la différence

$$g(x) = f(x) - \big[f'(a)(x-a) + f(a)\big] \qquad (x \in I).$$

$g$ est dérivable sur $I$ et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ (car $f'(a)$ et $f(a)$ sont des constantes).
Comme $f'' \geqslant 0$ sur $I$, la fonction $f'$ est croissante sur $I$. Donc :

- si $x \leqslant a$, alors $f'(x) \leqslant f'(a)$, c'est-à-dire $g'(x) \leqslant 0$ : $g$ est décroissante sur $I \cap ]-\infty; a]$ ;
- si $x \geqslant a$, alors $f'(x) \geqslant f'(a)$, c'est-à-dire $g'(x) \geqslant 0$ : $g$ est croissante sur $I \cap [a; +\infty[$.

Donc $g$ admet un minimum en $a$, égal à :

$$g(a) = f(a) - \big[0 + f(a)\big] = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $g(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a).$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc au-dessus de la tangente $T_a$. Ceci étant vrai pour tout $a \in I$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes. ■

| $x$ | $a$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ $0$ $+$ |
| $g$ | $\searrow$ $0$ $\nearrow$ |

## 4.3 Étudier la convexité d'une fonction

**Méthode (étudier la convexité)**

**1.** Vérifier que $f$ est deux fois dérivable et calculer $f''(x)$ (le factoriser si possible). **2.** Étudier le **signe de** $f''(x)$. **3.** Conclure : $f$ est convexe là où $f'' \geqslant 0$, concave là où $f'' \leqslant 0$.

**Exemple (la fonction cube)**

$f(x) = x^3$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec
$f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
$f''(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty;0]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $[0;+\infty[$.
Donc $f$ est **concave sur** $]-\infty;0]$
et **convexe sur** $[0;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| convexité | | concave | | convexe | |

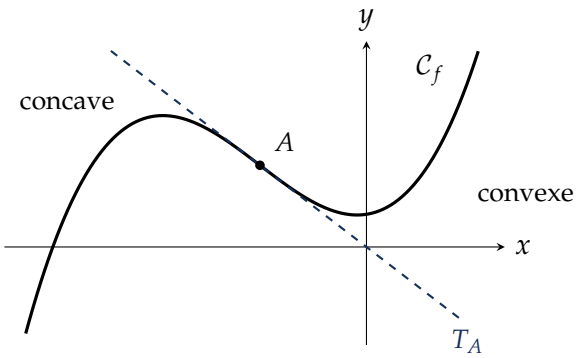
**Exercice d'application 6** (étudier la convexité)

Étudier la convexité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.
**1.** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 0{,}5x + 1$. **2.** $g(x) = (2 - x^2)\,\mathrm{e}^x$ ; on admet que $g'(x) = (-x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x$.

## 5. Point d'inflexion

**Définition (point d'inflexion)**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $A$ un point de $\mathcal{C}_f$. On dit que $A$ est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si la courbe **traverse sa tangente** en $A$.
En un point d'inflexion, la fonction **change de convexité** (de concave à convexe, ou l'inverse).




*La courbe de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 0{,}5x + 1$ (exercice 6) traverse sa tangente $T_A : y = -2{,}5x$ au point d'inflexion $A(-1\,;\,2{,}5)$.*

**Propriété**

Soit $f$ deux fois dérivable sur un intervalle $I$ et $a \in I$. Le point $A\big(a; f(a)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $f''$ **s'annule en** $a$ **en changeant de signe**.

**Attention**

Il ne suffit pas que $f''(a) = 0$ : pour $f(x) = x^4$, on a $f''(x) = 12x^2$, qui s'annule en 0 **sans changer de signe**. La fonction est convexe sur $\mathbb{R}$ et l'origine n'est pas un point d'inflexion. À l'inverse, pour $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$ change de signe en 0 : l'origine $O$ est un point d'inflexion (la courbe traverse en $O$ sa tangente, l'axe des abscisses).

**Exercice d'application 7** (convexité et point d'inflexion)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + \frac{5}{3}x^4$.

**1.** Montrer que $f''(x) = 20x^2(x+1)$. **2.** Étudier la convexité de $f$. **3.** Déterminer les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Exercice d'application 8** (plusieurs points d'inflexion)

Soit $\psi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = (1+x)\,e^{1-x^2}$.
On admet que, pour tout réel $x$ : $\psi''(x) = 2(x-1)(2x^2+4x+1)\,e^{1-x^2}$.
Étudier la convexité de $\psi$ et déterminer les abscisses des points d'inflexion de sa courbe.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

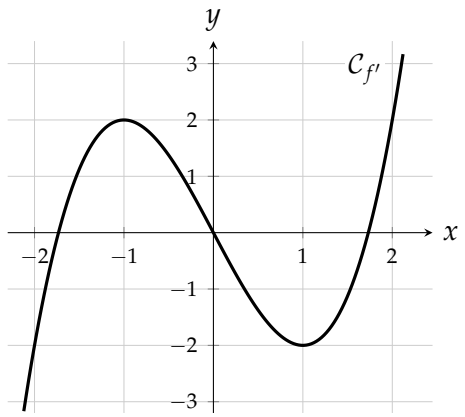
## 6. Lecture graphique et allure d'une courbe

**Méthode (lire la convexité sur un graphique)**

| Courbe donnée | $f$ est convexe sur $I$ lorsque… | $A(a;f(a))$ est un point d'inflexion lorsque… |
|---|---|---|
| courbe de $f$ | $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes (sous ses sécantes) | $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en $A$ |
| courbe de $f'$ | $f'$ est croissante sur $I$ (sa courbe monte) | $f'$ change de sens de variation en $a$ (extremum de $f'$) |
| courbe de $f''$ | la courbe de $f''$ est au-dessus de l'axe des abscisses | la courbe de $f''$ traverse l'axe des abscisses en $a$ |

**Ne pas confondre :** le **signe** de $f'$ donne les variations de $f$ ; les **variations** de $f'$ (ou le signe de $f''$) donnent la convexité de $f$.

## Exercice d'application 9 (lecture graphique)




Une fonction $f$ est définie et deux fois dérivable sur $[-2;2]$. On a représenté ci-contre la courbe de sa **dérivée** $f'$ (attention : ce n'est pas la courbe de $f$).

**1.** Donner, par lecture graphique, le sens de variation de $f$ sur $[-2;2]$ (on lira les abscisses à 0,1 près).
**2.** Sur quels intervalles $f$ est-elle convexe ? concave ?
**3.** En déduire les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

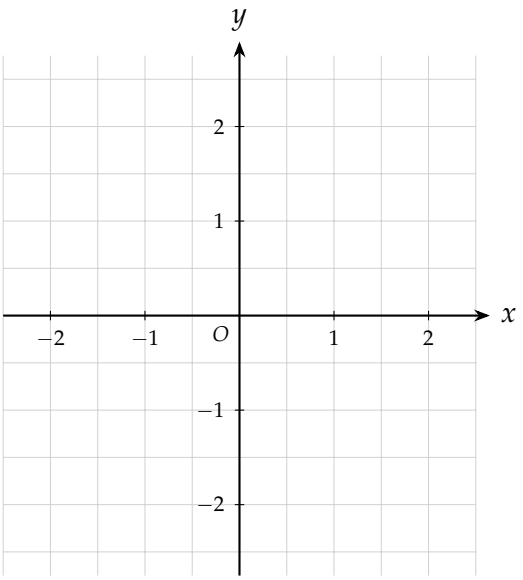
.....

## Exercice d'application 10 (esquisser une courbe à partir de tableaux)

Une fonction $f$, deux fois dérivable sur $[-2;2]$, a le tableau ci-dessous. On sait de plus que $f'(0) = -3$.

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ |

**1.** Étudier la convexité de $f$ et donner les coordonnées du point d'inflexion $A$ de $\mathcal{C}_f$, ainsi que l'équation de la tangente en $A$.
**2.** Esquisser l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-contre, en traçant les tangentes horizontales et la tangente en $A$.




.....

.....

.....

.....

.....

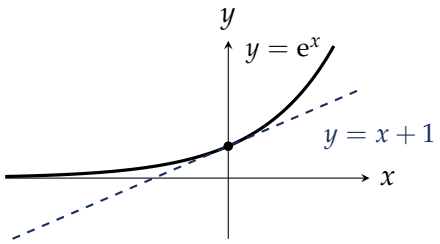
## 7. Convexité et inégalités

### Méthode (démontrer une inégalité grâce à la convexité)

- Si $f$ est **convexe** sur $I$, sa courbe est au-dessus de ses tangentes : pour tous $x$ et $a$ de $I$, $f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$.
- Si $f$ est **concave** sur $I$, sa courbe est en dessous de ses tangentes : $f(x) \leqslant f'(a)(x-a)+f(a)$ ; et elle est au-dessus de ses sécantes.

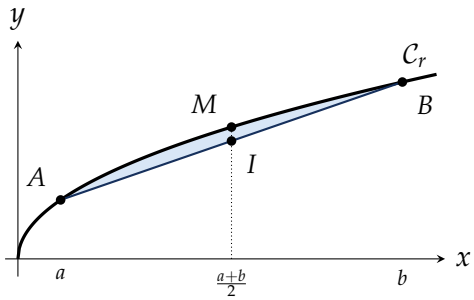
### Exercice d'application 11 (une inégalité classique)

**1.** Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
**2.** Déterminer une équation de sa tangente au point d'abscisse 0.
**3.** En déduire que, pour tout réel $x$ : $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.
**4.** En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$ : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

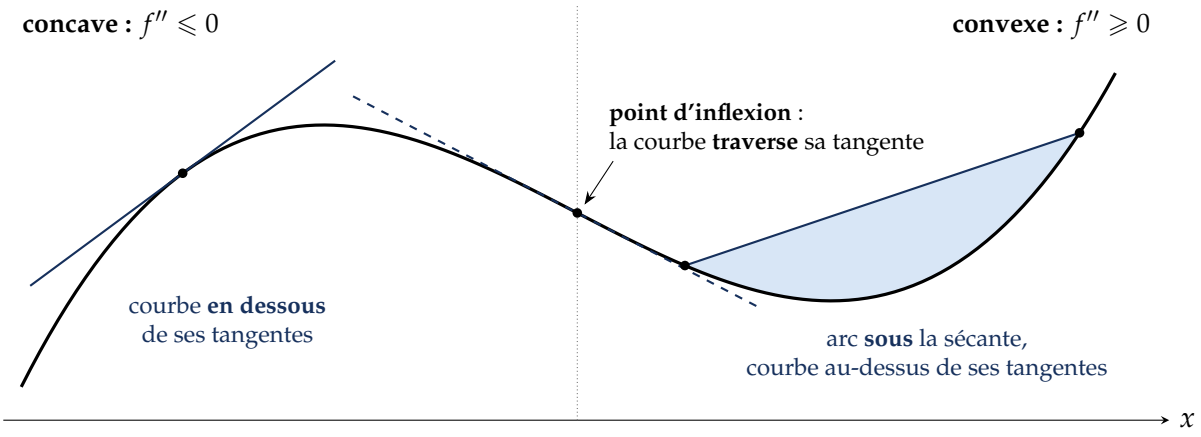



### Exercice d'application 12 (concavité de la racine carrée)

Soit $r$ la fonction racine carrée : $r(x) = \sqrt{x}$.
**1.** Montrer que $r''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$ pour $x > 0$. En déduire que $r$ est concave sur $]0;+\infty[$.
**2.** Grâce à la tangente au point d'abscisse 1, montrer que, pour tout $x > 0$ : $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.
**3.** Soit $0 < a < b$, $A(a;\sqrt{a})$, $B(b;\sqrt{b})$ et $I$ le milieu de $[AB]$. En utilisant la position de la courbe par rapport à la sécante $[AB]$, montrer que $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$.



## Fiche de synthèse — à retenir




| | $f$ **convexe sur** $I$ | $f$ **concave sur** $I$ |
|---|---|---|
| Sécantes | $\mathcal{C}_f$ en dessous de ses sécantes | $\mathcal{C}_f$ au-dessus de ses sécantes |
| Tangentes | $\mathcal{C}_f$ au-dessus de ses tangentes | $\mathcal{C}_f$ en dessous de ses tangentes |
| Dérivée $f'$ | $f'$ croissante sur $I$ | $f'$ décroissante sur $I$ |
| Dérivée seconde $f''$ | $f''(x) \geqslant 0$ sur $I$ | $f''(x) \leqslant 0$ sur $I$ |
| Inégalité | $f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$ | $f(x) \leqslant f'(a)(x-a)+f(a)$ |
| Exemples | $x^2$, $\mathrm{e}^x$, $\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ | $\sqrt{x}$, $-x^2$, $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$ |
| **Point d'inflexion** : la courbe traverse sa tangente $\iff$ $f$ change de convexité $\iff$ $f''$ s'annule **en changeant de signe**. | | |
| **Composée** : $(v\circ u)' = (v'\circ u)\times u'$ ; $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ; $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ ; $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$. | | |

### Méthode (les quatre méthodes essentielles)

1. **Étudier la convexité** : calculer $f''(x)$, la factoriser, étudier son signe ; $f$ est convexe là où $f'' \geqslant 0$, concave là où $f'' \leqslant 0$.
2. **Trouver les points d'inflexion** : chercher les valeurs $a$ où $f''$ s'annule **en changeant de signe**, puis calculer $f(a)$.
3. **Démontrer une inégalité** : prouver la convexité (ou la concavité), écrire la tangente en un point bien choisi et utiliser la position de la courbe par rapport à cette tangente (exemples : $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$ ; $\sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}$).
4. **Lire un graphique** : sur $\mathcal{C}_f$, position par rapport aux tangentes ; sur la courbe de $f'$, ses variations ; sur la courbe de $f''$, son signe.

### Attention (erreurs fréquentes)

- Oublier le facteur $u'$ : $\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)' = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ et non $\mathrm{e}^{-x^2}$ ; $\left((3x+1)^4\right)' = 12(3x+1)^3$ et non $4(3x+1)^3$.
- Conclure à un point d'inflexion dès que $f''(a) = 0$ : il faut un **changement de signe** (contre-exemple : $x^4$ en 0).
- Confondre le **signe** de $f'$ (qui donne les variations de $f$) et les **variations** de $f'$ (qui donnent la convexité de $f$).

# DÉRIVATION et convexité

## Dérivée d'une composée

- $(g \circ u)' = u' \times g'(u)$ : $u'$ toujours en facteur
- $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$
- $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$ ; $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ ; $(\cos u)' = -u' \sin u$

## Dérivée seconde

- $f'' = (f')'$
- $f'$ gouverne les variations de $f$
- $f''$ gouverne les variations de $f'$
- Tableau de signes de $f''$

## Convexité

- $f$ convexe sur $I \iff f'' \geqslant 0 \iff f'$ croissante
- Courbe au-dessus de ses tangentes
- Concave : $f'' \leqslant 0$, courbe sous ses tangentes
- Convexe $\neq$ croissante !

## Point d'inflexion

- $f''$ s'annule **et change de signe**
- La courbe traverse sa tangente
- Annulation seule ne suffit pas ($x^4$ en 0)
- Rédiger : signe de $f''$ de part et d'autre

## Tangente

- $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
- Position courbe / tangente via convexité
- Inégalités : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$, $\ln x \leqslant x-1$
- Approximation affine

## Applications

- Optimisation : $f' = 0$ et signe
- Inégalités par convexité
- Étude complète : $D_f$, limites, $f'$, $f''$, tableau
- Python : signe de $f''$ sur une grille

*Chapitre 5 · Les trois réflexes : $u'$ en facteur ; inflexion = changement de signe ; convexe $\neq$ croissante.*