Chapitre 5. Cours

Compléments sur la dérivation et convexité

Composée de fonctions · dérivée seconde · convexité · points d'inflexion · lecture graphique · inégalités

1. Rappels sur la dérivation

Définition (nombre dérivé, tangente)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est **dérivable en** a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est le **nombre dérivé** $f'(a)$: c'est le **coefficient directeur de la tangente** T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, d'équation $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Validité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
$mx+p$	m	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations (u, v dérivables, k réel)

Fonction	Dérivée	Condition
$u+v$	$u'+v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v+uv'$	
$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	$v \neq 0$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$

Propriété (dérivée et sens de variation)

Soit f dérivable sur un intervalle I. Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I ; si $f' \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I (strictement si f' ne s'annule qu'en des points isolés).

Exercice d'application 1 (tangente)

Soit $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

.....

.....

.....

.....

Exercice d'application 2 (opérations)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = (4x^2+3x)(5x-2)$ **b.** $g(x) = \dfrac{6x-5}{x^2+1}$ **c.** $h(x) = (3x+4)\,\mathrm{e}^x$

.....

.....

.....

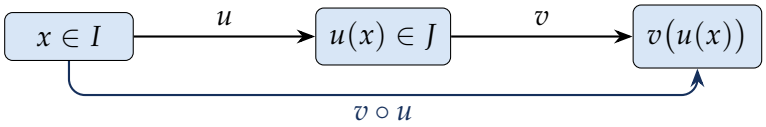
.....

.....

2. Dérivée d'une fonction composée

Définition (composée de deux fonctions)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. La **composée de u suivie de v**, notée $v \circ u$ (on lit « v rond u »), est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v\big(u(x)\big)$.



Exemple

$h(x) = \sqrt{3x+1}$: on calcule d'abord $u(x) = 3x+1$, puis on prend la racine $v(X) = \sqrt{X}$; donc $h = v \circ u$, définie lorsque $3x+1 \geqslant 0$. **L'ordre compte :** $(u \circ v)(x) = 3\sqrt{x}+1 \neq \sqrt{3x+1}$.

Théorème (dérivée d'une composée — admis)

Si u est dérivable sur I, si v est dérivable sur J et si $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$, alors $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$\boxed{(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \big(v(u(x))\big)' = v'\big(u(x)\big) \times u'(x).$$

Conséquences : dérivées des composées usuelles (u dérivable sur I)

Fonction	Dérivée	Condition	Exemple
$g(ax+b)$	$a\,g'(ax+b)$		$\big(\mathrm{e}^{3x-1}\big)' = 3\,\mathrm{e}^{3x-1}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$ sur I	$\big(\sqrt{x^2+1}\big)' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
u^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$n\,u'\,u^{n-1}$	$u \neq 0$ si $n < 0$	$\big((x^2+1)^5\big)' = 5 \times 2x\,(x^2+1)^4 = 10x(x^2+1)^4$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$ sur I	$\left(\dfrac{1}{x^2+3}\right)' = -\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$
e^u	$u'\,\mathrm{e}^u$		$\big(\mathrm{e}^{x^2}\big)' = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$

Justification : avec $v(X) = \sqrt{X}$, on obtient $\big(\sqrt{u}\big)' = v'(u) \times u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times u'$. *À compléter plus tard :* $\ln u$, $\cos u$, $\sin u$.

Exercice d'application 3 (dériver une composée)

Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas (on admet que les fonctions sont dérivables sur l'intervalle indiqué).

a. $f(x) = \sqrt{3x^2+4x-1}$ sur un intervalle où $3x^2+4x-1>0$ **b.** $f(x) = (2x^2+5x-1)^3$ sur $\mathbb{R}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{6x-7}$ sur $\left]\frac{7}{6};+\infty\right[$ **d.** $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice d'application 4 (étude d'une fonction)

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x+1}}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{3x+2}{(3x+1)\sqrt{3x+1}}$. **2.** En déduire les variations de f sur I.

3. Déterminer les limites de f en $-\frac{1}{3}$ et en $+\infty$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Dérivée seconde

Définition (dérivée seconde)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si sa fonction dérivée f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable** sur I ; la dérivée de f' est appelée **dérivée seconde** de f et se note f'' :

$$f'' = (f')'.$$

Exemple : pour $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$ puis $f''(x) = 6x - 6$. **En physique :** si $x(t)$ est la position d'un mobile, $x'(t)$ est sa vitesse et $x''(t)$ son accélération.

Exercice d'application 5 (dérivée seconde)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$. Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$; donner les résultats sous forme factorisée.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

4. Convexité d'une fonction

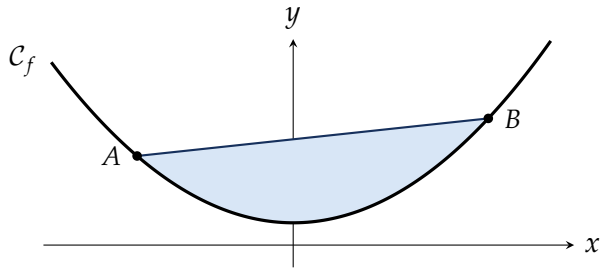
4.1 Définition par les sécantes

Une **sécante** à la courbe $\mathcal{C}_f$ est une droite qui passe par deux points A et B de $\mathcal{C}_f$. On regarde la position de l'arc de courbe $\overset{\frown}{AB}$ par rapport au segment $[AB]$: la courbe est « tournée vers le haut » comme une cuvette, ou « vers le bas » comme une bosse.

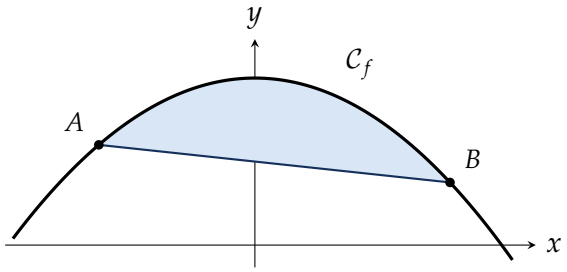
Définition (fonction convexe, fonction concave)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

- f est **convexe** sur I si, pour tous points A et B de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses dans I, l'arc de $\mathcal{C}_f$ compris entre A et B est situé **en dessous** du segment $[AB]$.
- f est **concave** sur I si, pour tous points A et B de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses dans I, l'arc de $\mathcal{C}_f$ compris entre A et B est situé **au-dessus** du segment $[AB]$.



f convexe : l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est sous la sécante $[AB]$.

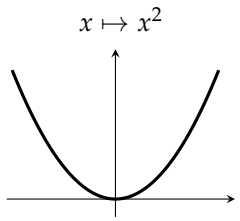


f concave : l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est au-dessus de la sécante $[AB]$.

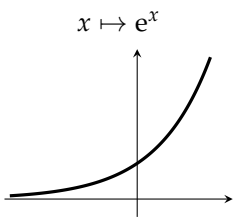
Remarque

f est concave sur $I \iff -f$ est convexe sur I. Une fonction affine est à la fois convexe et concave. La définition n'exige pas la dérivabilité : $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

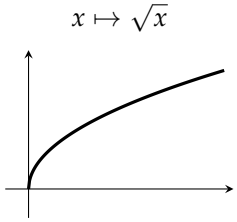
Fonctions de référence.



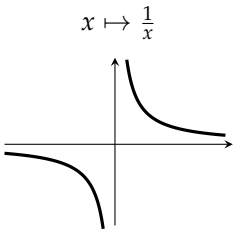
convexe sur $\mathbb{R}$



convexe sur $\mathbb{R}$



concave sur $[0;+\infty[$



concave sur $]-\infty;0[$
convexe sur $]0;+\infty[$

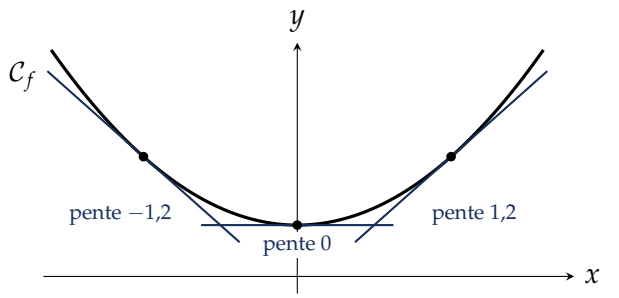
4.2 Caractérisation par les tangentes et par les dérivées

Théorème (admis)

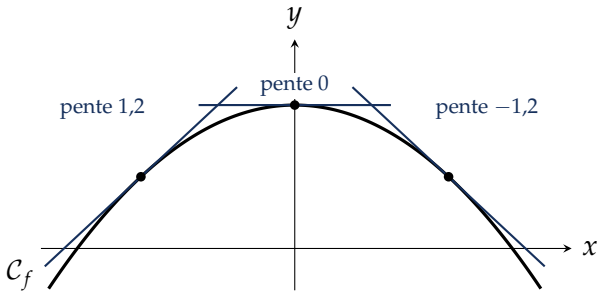
Soit f une fonction **deux fois dérivable** sur un intervalle I. Les propositions suivantes sont équivalentes :

f est **convexe** sur I $\leftrightarrow$ $\mathcal{C}_f$ est **au-dessus** de chacune de ses tangentes sur I $\leftrightarrow$ f' est **croissante** sur I $\leftrightarrow$ $f'' \geqslant 0$ sur I (f'' positive)

De même, f est **concave** sur $I \iff \mathcal{C}_f$ est **en dessous** de ses tangentes $\iff f'$ est **décroissante** sur $I \iff f'' \leqslant 0$ sur I.



f convexe : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes, dont les pentes $f'(a)$ augmentent quand a augmente.



f concave : $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses tangentes, dont les pentes $f'(a)$ diminuent quand a augmente.

Démonstration (au programme) — si $f'' \geqslant 0$ sur I, alors $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes

Soit $a \in I$ et $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a. Pour comparer $\mathcal{C}_f$ et T_a, on étudie le signe de la différence

$$g(x) = f(x) - \big[f'(a)(x-a) + f(a)\big] \qquad (x \in I).$$

g est dérivable sur I et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ (car $f'(a)$ et $f(a)$ sont des constantes).
Comme $f'' \geqslant 0$ sur I, la fonction f' est croissante sur I. Donc :

- si $x \leqslant a$, alors $f'(x) \leqslant f'(a)$, c'est-à-dire $g'(x) \leqslant 0$: g est décroissante sur $I \cap]-\infty; a]$;
- si $x \geqslant a$, alors $f'(x) \geqslant f'(a)$, c'est-à-dire $g'(x) \geqslant 0$: g est croissante sur $I \cap [a; +\infty[$.

Donc g admet un minimum en a, égal à :

$$g(a) = f(a) - \big[0 + f(a)\big] = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $g(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a).$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc au-dessus de la tangente T_a. Ceci étant vrai pour tout $a \in I$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes. ■

x	a
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
g	$\searrow$ 0 $\nearrow$

4.3 Étudier la convexité d'une fonction

Méthode (étudier la convexité)

1. Vérifier que f est deux fois dérivable et calculer $f''(x)$ (le factoriser si possible). **2.** Étudier le **signe de** $f''(x)$. **3.** Conclure : f est convexe là où $f'' \geqslant 0$, concave là où $f'' \leqslant 0$.

Exemple (la fonction cube)

$f(x) = x^3$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec
$f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
$f''(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty;0]$ et $f''(x) \geqslant 0$ sur $[0;+\infty[$.
Donc f est **concave sur** $]-\infty;0]$
et **convexe sur** $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
convexité		concave		convexe	

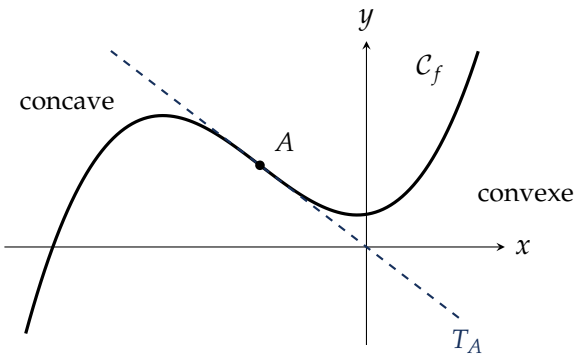
Exercice d'application 6 (étudier la convexité)

Étudier la convexité des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.
1. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 0{,}5x + 1$. **2.** $g(x) = (2 - x^2)\,\mathrm{e}^x$; on admet que $g'(x) = (-x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x$.

5. Point d'inflexion

Définition (point d'inflexion)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et A un point de $\mathcal{C}_f$. On dit que A est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$ si la courbe **traverse sa tangente** en A.
En un point d'inflexion, la fonction **change de convexité** (de concave à convexe, ou l'inverse).



La courbe de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 0{,}5x + 1$ (exercice 6) traverse sa tangente $T_A : y = -2{,}5x$ au point d'inflexion $A(-1\,;\,2{,}5)$.

Propriété

Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$. Le point $A\big(a; f(a)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si f'' **s'annule en** a **en changeant de signe**.

Attention

Il ne suffit pas que $f''(a) = 0$: pour $f(x) = x^4$, on a $f''(x) = 12x^2$, qui s'annule en 0 **sans changer de signe**. La fonction est convexe sur $\mathbb{R}$ et l'origine n'est pas un point d'inflexion. À l'inverse, pour $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$ change de signe en 0 : l'origine O est un point d'inflexion (la courbe traverse en O sa tangente, l'axe des abscisses).

Exercice d'application 7 (convexité et point d'inflexion)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + \frac{5}{3}x^4$.

1. Montrer que $f''(x) = 20x^2(x+1)$. **2.** Étudier la convexité de f. **3.** Déterminer les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice d'application 8 (plusieurs points d'inflexion)

Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = (1+x)\,e^{1-x^2}$.
On admet que, pour tout réel x : $\psi''(x) = 2(x-1)(2x^2+4x+1)\,e^{1-x^2}$.
Étudier la convexité de ψ et déterminer les abscisses des points d'inflexion de sa courbe.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

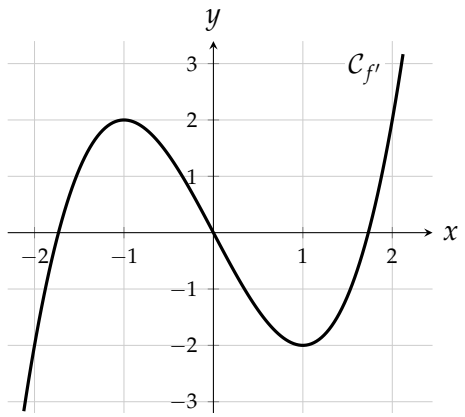
6. Lecture graphique et allure d'une courbe

Méthode (lire la convexité sur un graphique)

Courbe donnée	f est convexe sur I lorsque…	$A(a;f(a))$ est un point d'inflexion lorsque…
courbe de f	$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes (sous ses sécantes)	$\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en A
courbe de f'	f' est croissante sur I (sa courbe monte)	f' change de sens de variation en a (extremum de f')
courbe de f''	la courbe de f'' est au-dessus de l'axe des abscisses	la courbe de f'' traverse l'axe des abscisses en a

Ne pas confondre : le **signe** de f' donne les variations de f ; les **variations** de f' (ou le signe de f'') donnent la convexité de f.

Exercice d'application 9 (lecture graphique)



Une fonction f est définie et deux fois dérivable sur $[-2;2]$. On a représenté ci-contre la courbe de sa **dérivée** f' (attention : ce n'est pas la courbe de f).

1. Donner, par lecture graphique, le sens de variation de f sur $[-2;2]$ (on lira les abscisses à 0,1 près).
2. Sur quels intervalles f est-elle convexe ? concave ?
3. En déduire les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

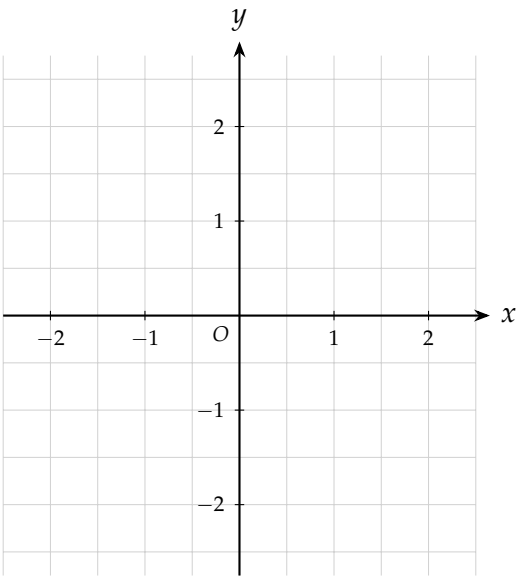
.....

Exercice d'application 10 (esquisser une courbe à partir de tableaux)

Une fonction f, deux fois dérivable sur $[-2;2]$, a le tableau ci-dessous. On sait de plus que $f'(0) = -3$.

x	-2		-1		0		1		2
$f''(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	-2	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	2

1. Étudier la convexité de f et donner les coordonnées du point d'inflexion A de $\mathcal{C}_f$, ainsi que l'équation de la tangente en A.
2. Esquisser l'allure de $\mathcal{C}_f$ dans le repère ci-contre, en traçant les tangentes horizontales et la tangente en A.



.....

.....

.....

.....

.....

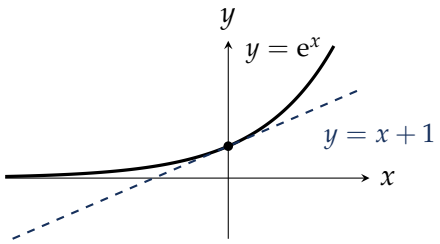
7. Convexité et inégalités

Méthode (démontrer une inégalité grâce à la convexité)

- Si f est **convexe** sur I, sa courbe est au-dessus de ses tangentes : pour tous x et a de I, $f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$.
- Si f est **concave** sur I, sa courbe est en dessous de ses tangentes : $f(x) \leqslant f'(a)(x-a)+f(a)$; et elle est au-dessus de ses sécantes.

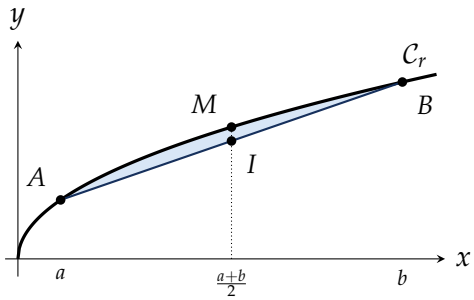
Exercice d'application 11 (une inégalité classique)

1. Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de sa tangente au point d'abscisse 0.
3. En déduire que, pour tout réel x : $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.
4. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

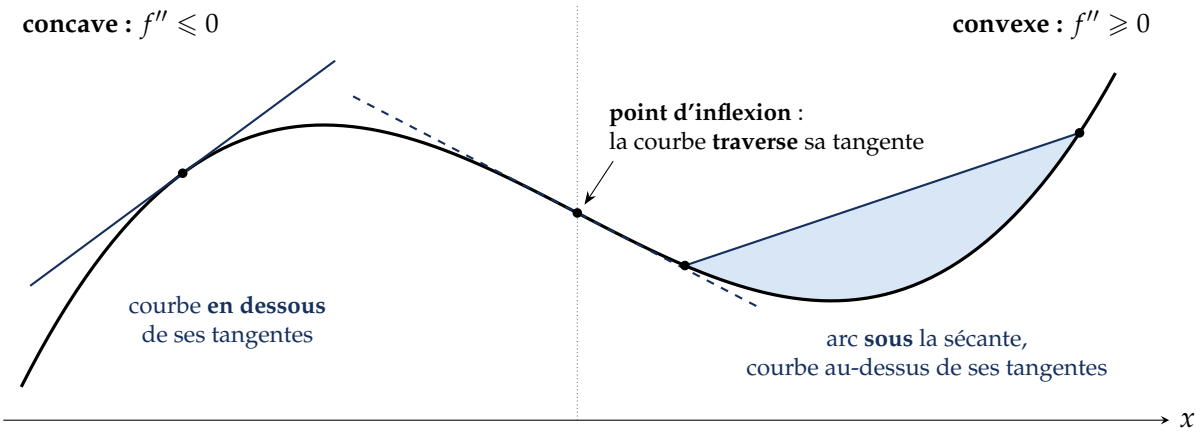


Exercice d'application 12 (concavité de la racine carrée)

Soit r la fonction racine carrée : $r(x) = \sqrt{x}$.
1. Montrer que $r''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$ pour $x > 0$. En déduire que r est concave sur $]0;+\infty[$.
2. Grâce à la tangente au point d'abscisse 1, montrer que, pour tout $x > 0$: $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.
3. Soit $0 < a < b$, $A(a;\sqrt{a})$, $B(b;\sqrt{b})$ et I le milieu de $[AB]$. En utilisant la position de la courbe par rapport à la sécante $[AB]$, montrer que $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$.



Fiche de synthèse — à retenir



	f **convexe sur** I	f **concave sur** I
Sécantes	$\mathcal{C}_f$ en dessous de ses sécantes	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de ses sécantes
Tangentes	$\mathcal{C}_f$ au-dessus de ses tangentes	$\mathcal{C}_f$ en dessous de ses tangentes
Dérivée f'	f' croissante sur I	f' décroissante sur I
Dérivée seconde f''	$f''(x) \geqslant 0$ sur I	$f''(x) \leqslant 0$ sur I
Inégalité	$f(x) \geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$	$f(x) \leqslant f'(a)(x-a)+f(a)$
Exemples	x^2, e^x, $\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$	$\sqrt{x}$, $-x^2$, $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$
Point d'inflexion : la courbe traverse sa tangente $\iff$ f change de convexité $\iff$ f'' s'annule **en changeant de signe**.		
Composée : $(v\circ u)' = (v'\circ u)\times u'$; $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$; $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$.		

Méthode (les quatre méthodes essentielles)

1. **Étudier la convexité** : calculer $f''(x)$, la factoriser, étudier son signe ; f est convexe là où $f'' \geqslant 0$, concave là où $f'' \leqslant 0$.
2. **Trouver les points d'inflexion** : chercher les valeurs a où f'' s'annule **en changeant de signe**, puis calculer $f(a)$.
3. **Démontrer une inégalité** : prouver la convexité (ou la concavité), écrire la tangente en un point bien choisi et utiliser la position de la courbe par rapport à cette tangente (exemples : $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$; $\sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}$).
4. **Lire un graphique** : sur $\mathcal{C}_f$, position par rapport aux tangentes ; sur la courbe de f', ses variations ; sur la courbe de f'', son signe.

Attention (erreurs fréquentes)

- Oublier le facteur u' : $\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)' = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ et non e^{-x^2} ; $\left((3x+1)^4\right)' = 12(3x+1)^3$ et non $4(3x+1)^3$.
- Conclure à un point d'inflexion dès que $f''(a) = 0$: il faut un **changement de signe** (contre-exemple : x^4 en 0).
- Confondre le **signe** de f' (qui donne les variations de f) et les **variations** de f' (qui donnent la convexité de f).