Devoir surveillé n°5 · 20 novembre 2024

Dérivation, étude de fonctions et trigonométrie

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Exercice 1

On considère la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{-3x^2 + 11x + 4}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de g.

b. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations complet.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3)\sqrt{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f. Déterminer ses limites, ainsi que son tableau de variations.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
4. Déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 4

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. Montrer que la fonction h est 2π-périodique.
2. Montrer que la fonction h est impaire.
3. Calculer $h'(x)$ et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $h'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.
4. En déduire le tableau de variations de h sur $[0; \pi]$.
5. Représenter graphiquement la fonction h sur $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes.

a. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\cos 3x = \dfrac{1}{2}$

c. $-\sin(2x) + \sqrt{2} = 0$

d. $4\cos^2 x = 3$