Chapitre 5. Fiche d'exercices n°1

Dérivation, composée et convexité

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Calculer la dérivée de chaque fonction.

a. $f(x) = (4x-1)^6$
b. $f(x) = \mathrm{e}^{5x-2}$
c. $f(x) = \sqrt{3x+7}$
d. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$
e. $f(x) = \left(x^2+1\right)^4$
f. $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$

Exercice 2 ⋆

Pour chaque fonction, calculer f''. a. $f(x) = x^4 - 2x^3$ b. $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (sur $]0;+\infty[$).

Exercice 3 ⋆

Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de f lorsque : a. $f''(x) = 6x - 12$ b. $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ c. $f''(x) = -2x^2$.

Exercice 4 ⋆

Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a : a. $f(x) = x^2 - 3x$, $a = 2$ b. $f(x) = \mathrm{e}^x$, $a = 0$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 5 ⋆⋆

Soit $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
b. Calculer $f''(x)$ et étudier la convexité de f. Préciser le point d'inflexion.

Exercice 6 ⋆⋆

Soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.
b. Montrer que $f''(x) = \dfrac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$ et déterminer les abscisses des points d'inflexion.

Exercice 7 ⋆⋆

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

Exercice 8 ⋆⋆

Vrai ou faux ? Justifier.

a. Une fonction convexe est croissante.

b. Si $f''(a) = 0$ alors la courbe admet un point d'inflexion en a.

c. Si f est convexe sur I, sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes sur I.

d. Si f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.

Exercice 9 ⋆⋆

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a. Étudier les variations de f.

b. Étudier la convexité de f et préciser le point d'inflexion.

c. Donner l'équation de la tangente en ce point.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

a. Étudier les variations de f et en déduire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout x.

b. En déduire l'inégalité $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ et l'interpréter à l'aide de la convexité.

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.

b. Montrer que $f'(x) = \left(x^2 - 2\right)\mathrm{e}^x$ et dresser le tableau de variations.

c. Montrer que $f''(x) = \left(x^2 + 2x - 2\right)\mathrm{e}^x$ et déterminer les points d'inflexion.

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Une entreprise produit x centaines d'objets ($0 \leqslant x \leqslant 10$). Le coût total, en milliers d'euros, est $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 8$.

a. Étudier la convexité de C et déterminer le point d'inflexion.

b. Interpréter : à partir de quelle production le coût augmente-t-il de plus en plus vite ?

c. Le coût marginal est $C'(x)$. Déterminer la production qui minimise le coût marginal.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \dfrac{4}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ et en déduire le sens de variation.

b. On admet que $f''(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-x})^3}$. Étudier la convexité de f et déterminer le point d'inflexion.

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 14 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$ sur $[-1;+\infty[$.

a. Montrer que f est concave sur $]-1;+\infty[$.

b. En déduire que pour tout $x > -1$: $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

Exercice 15 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f est impaire.

b. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer $\lim_{+\infty} f$ et interpréter graphiquement.

Exercice 16 ⋆⋆⋆⋆

Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f''(x) = (x-1)(x+3)$.

a. Déterminer les intervalles de convexité de f et les abscisses des points d'inflexion.

b. Sachant de plus que $f'(1) = 0$, dire si f admet un extremum en 1 et de quelle nature.

Exercice 17 ⋆⋆⋆⋆

(Inégalité de convexité) Soit $f(x) = x^2$.

a. Justifier que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que pour tous réels a et b : $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

c. Retrouver ce résultat par un calcul direct.