Chapitre 6. Cours

Vecteurs, droites et plans de l'espace

1. Vecteurs de l'espace

Tout ce que vous savez des vecteurs du plan reste vrai dans l'espace, sans exception : égalité, somme, produit par un réel, relation de Chasles. Rien à réapprendre.

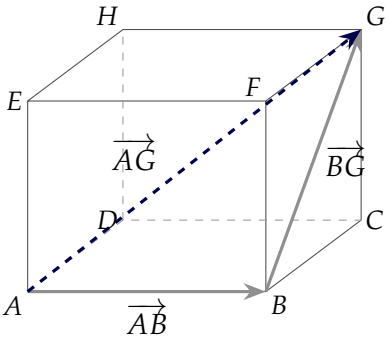


Figure 1 — Relation de Chasles dans le cube : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$.

Définition 6.1 — Vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$, ou lorsque $\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété 6.2 — Alignement

A, B, C sont **alignés** $\iff$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice d'application 1

Les points $A(1\,;2\,;-1)$, $B(3\,;6\,;1)$ ***et*** $C(4\,;8\,;2)$ ***sont-ils alignés ?***

Solution. $\overrightarrow{AB}(2\,;4\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;6\,;3)$. On teste $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$: la première coordonnée donne $k = \dfrac{3}{2}$, et l'on vérifie les **deux autres** : $6 = \dfrac{3}{2} \times 4$ ✓ et $3 = \dfrac{3}{2} \times 2$ ✓.
Les vecteurs sont colinéaires : les points A, B, C sont alignés.

Exemple — Chasles dans le cube

Dans le cube de la figure 1, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$: le chemin $A \to B \to G$ et le chemin direct $A \to G$ donnent le même vecteur.

Remarque — Bon réflexe

Face à une somme de vecteurs, cherchez les **points intermédiaires qui s'éliminent**. Chasles ne sert qu'à ça : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

2. Coplanarité

Définition 6.3 — Vecteurs coplanaires

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** lorsqu'ils admettent des représentants contenus dans un même plan.

Théorème 6.4 — Caractérisation de la coplanarité

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires** :

$$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \text{ coplanaires } \iff \exists\,(a\,;b) \in \mathbb{R}^2,\ \vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}.$$

Exercice d'application 2

Les vecteurs $\vec{u}(1\,;0\,;2)$, $\vec{v}(0\,;1\,;-1)$ ***et*** $\vec{w}(2\,;3\,;1)$ ***sont-ils coplanaires ?***

Solution. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. On cherche $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ 2a - b = 1 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $a = 2$ et $b = 3$; on **vérifie la troisième** : $2 \times 2 - 3 = 1$ ✓.
Donc $\vec{w} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires.

Propriété 6.5 — Points coplanaires

A, B, C, D sont coplanaires $\iff$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Exercice d'application 3

Les points $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(0\,;1\,;0)$ ***et*** $D(2\,;3\,;0)$ ***sont-ils coplanaires ?***

Solution. $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(0\,;1\,;0)$ ne sont pas colinéaires, et

$$\overrightarrow{AD}(2\,;3\,;0) = 2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}.$$

Les trois vecteurs sont coplanaires, donc les quatre points aussi.

Attention — Erreur à éviter

Le théorème 6.4 **exige** que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne soient pas colinéaires. S'ils le sont, ils ne définissent aucun plan et la décomposition n'a plus de sens.

3. Bases et repères

Définition 6.6 — Base et repère

Trois vecteurs **non coplanaires** $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ forment une **base** de l'espace. Associés à un point O, ils forment un **repère** $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Théorème 6.7 — Décomposition unique

Dans une base, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière **unique**

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Le triplet $(x\,;y\,;z)$ est le triplet des **coordonnées** de $\vec{u}$.

Exercice d'application 4

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$***, donner les coordonnées de*** $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$ ***puis celles de*** $\vec{v} = \vec{k} - 4\vec{\imath}$***.***

Solution. Il suffit de lire les coefficients dans l'ordre $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

$$\vec{u}\,(2\,;-1\,;3) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\,(-4\,;0\,;1).$$

Remarque — Astuce

Dans un cube $ABCDEFGH$, le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ donne à tous les sommets des coordonnées dans $\{0\,;1\}$. Aucun calcul, une simple lecture.

4. Calculs en coordonnées

Propriété 6.8 — Coordonnées, milieu, colinéarité

Dans un repère, si $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$:

$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\; y_B - y_A\,;\; z_B - z_A) \qquad \text{et} \qquad I\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\; \frac{y_A + y_B}{2}\,;\; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

pour le milieu I de $[AB]$. Et pour $\vec{u} \neq \vec{0}$, les vecteurs $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$ sont colinéaires si et seulement s'il existe k tel que

$$x' = kx, \qquad y' = ky \qquad \textbf{et} \qquad z' = kz.$$

Exercice d'application 5

On donne $A(1\,;3\,;-2)$ ***et*** $B(4\,;-1\,;0)$***.***
a. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ ***et du milieu*** I ***de*** $[AB]$***.*** ***b. Les vecteurs*** $\vec{u}(2\,;-4\,;6)$ ***et*** $\vec{v}(-3\,;6\,;-9)$ ***sont-ils colinéaires ?***

Solution.
a. $\overrightarrow{AB}\,(3\,;-4\,;2)$ et $I\left(\frac{5}{2}\,;1\,;-1\right)$.

b. La première coordonnée donne $k = -\frac{3}{2}$; on vérifie : $6 = -\frac{3}{2} \times (-4)$ ✓ et $-9 = -\frac{3}{2} \times 6$ ✓. Les vecteurs sont colinéaires.

Attention — Erreur à éviter

Trois égalités à vérifier, pas deux. Deux coordonnées proportionnelles ne suffisent pas dans l'espace.

5. Droites de l'espace

Définition 6.9 — Droite de l'espace

La droite passant par A et de **vecteur directeur** $\vec{u} \neq \vec{0}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Propriété 6.10 — Représentation paramétrique d'une droite

Si $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $\vec{u}(a\,;b\,;c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application 6

Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par $A(0\,;1\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;0\,;-1)$, puis dire si $M(3\,;1\,;-1)$ appartient à d.

Solution. Une représentation paramétrique de d est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour M : la première ligne donne $t = 3$; on reporte dans les autres : $y = 1$ ✓ et $z = 2 - 3 = -1$ ✓. La **même** valeur du paramètre convient aux trois lignes : $M \in d$.

Remarque — Bon réflexe

Une droite admet une **infinité** de représentations paramétriques : elles dépendent du point choisi et du vecteur directeur, défini à un facteur près. Deux systèmes différents peuvent décrire la même droite.

6. Plans de l'espace

Définition 6.11 — Plan de l'espace

Le plan passant par A et dirigé par deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u} + s\,\vec{v}$, avec $(t\,;s) \in \mathbb{R}^2$.

Propriété 6.12 — Représentation paramétrique d'un plan

Avec $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ et $\vec{v}(a'\,;b'\,;c')$:

$$\begin{cases} x = x_A + a\,t + a'\,s \\ y = y_A + b\,t + b'\,s \\ z = z_A + c\,t + c'\,s \end{cases} \qquad (t\,;s) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice d'application 7

Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1\,;0\,;0)$ et dirigé par $\vec{u}(1\,;1\,;0)$ et $\vec{v}(0\,;1\,;1)$, puis dire si $B(2\,;3\,;2)$ appartient à $\mathcal{P}$.

Solution. Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t + s \\ z = s \end{cases} \qquad (t\,;s) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour B : $x = 2$ donne $t = 1$ et $z = 2$ donne $s = 2$; on **vérifie la troisième** coordonnée : $y = t + s = 1 + 2 = 3$ ✓. Donc $B \in \mathcal{P}$.

7. Positions relatives

Dans l'espace, deux droites peuvent être **coplanaires** — alors parallèles ou sécantes — ou **non coplanaires**. Ce troisième cas n'existe pas dans le plan : c'est la seule vraie nouveauté du chapitre.

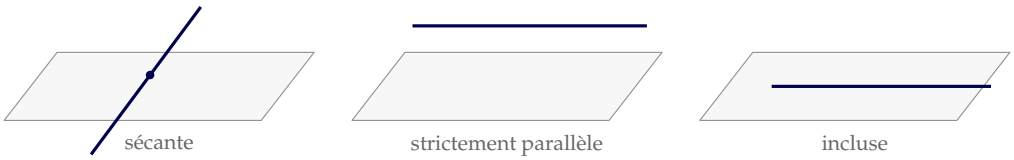


Figure 2 — Les trois positions relatives d'une droite et d'un plan.

Propriété 6.13 — Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont : **sécantes** (un point commun) ou **strictement parallèles** ou **confondues** — dans ces trois cas elles sont coplanaires — ou bien **non coplanaires** (ni parallèles, ni sécantes).

Exercice d'application 8

Étudier la position relative de d_1, passant par $A(0\,;0\,;0)$ et dirigée par $\vec{u}(1\,;1\,;0)$, et de d_2, passant par $B(0\,;0\,;1)$ et dirigée par $\vec{v}(2\,;2\,;0)$.

Solution. On compare d'abord les vecteurs directeurs : $\vec{v} = 2\,\vec{u}$, ils sont colinéaires, donc d_1 et d_2 sont parallèles.
Reste à savoir si elles sont confondues : $B(0\,;0\,;1)$ appartient-il à d_1 ? Les points de d_1 vérifient $z = 0$, or $z_B = 1$: non.
Les droites sont **strictement parallèles**.

Remarque — Bon réflexe

Pour trancher entre les trois cas, résolvez le système. **Une** solution : sécantes. **Aucune** : strictement parallèles ou non coplanaires. Une **infinité** : confondues ou incluse. Le nombre de solutions donne la réponse, pas le dessin.

Méthodes

Méthode 1 — Démontrer une colinéarité ou un alignement

Quand ? Deux vecteurs proportionnels ? Trois points sur une même droite ? C'est la même question.

1. Calculer les coordonnées des deux vecteurs — pour trois points A, B, C, prendre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Chercher k à partir d'une coordonnée **non nulle**.
3. Vérifier les **deux autres** coordonnées.
4. Conclure — et pour trois points, ajouter qu'ils ont le point A en commun.

Exemple éclair. $\vec{u}(2\,;-4\,;6)$ et $\vec{v}(-1\,;2\,;-3)$: on pose $\vec{v} = k\,\vec{u}$; la première coordonnée donne $k = -\dfrac{1}{2}$; on vérifie $2 = -\dfrac{1}{2} \times (-4)$ ✓ et $-3 = -\dfrac{1}{2} \times 6$ ✓. Colinéaires.

Erreur à éviter. Conclure sur deux coordonnées. Dans l'espace il en faut **trois** : deux suffisent dans le plan, pas ici.

Méthode 2 — Décomposer un vecteur, tester une coplanarité

Quand ? « Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ? », « décomposer $\vec{w}$ sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ » : une seule et même méthode.

1. Vérifier d'abord que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont **pas** colinéaires.
2. Écrire $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ et traduire en système de **trois** équations.
3. Résoudre avec **deux** équations bien choisies.
4. Reporter dans la troisième : c'est elle qui décide.

Bon réflexe. Deux équations donnent le couple $(a\,;b)$, la troisième donne la **réponse**. Si elle est vérifiée, les vecteurs sont coplanaires ; sinon, ils ne le sont pas. Sauter cette étape, c'est répondre à côté de la question posée.

Astuce. Choisissez pour l'étape 3 les deux équations où une inconnue disparaît le plus vite — souvent celles qui contiennent un zéro.

Méthode 3 — Déterminer une représentation paramétrique

Quand ? Une droite ou un plan est donné par des points ou des vecteurs, et l'on veut en faire un objet calculable.

1. Identifier un **point** de l'objet et un ou deux **vecteurs directeurs**.
2. Pour une droite définie par A et B, prendre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ — et le simplifier.
3. Écrire les trois équations coordonnée par coordonnée.
4. Préciser le domaine du ou des paramètres : $t \in \mathbb{R}$, ou $(t\,;s) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple éclair. $A(0\,;1\,;2)$, $\overrightarrow{AB}(3\,;0\,;-3)$ simplifié en $\vec{u}(1\,;0\,;-1)$: on obtient $x = t$, $y = 1$, $z = 2 - t$.

Bon réflexe. Contrôlez toujours en substituant : $t = 0$ doit redonner le point de départ.

Erreur à éviter. Dire « **la** » représentation paramétrique. Il y en a une infinité : le point et le facteur du vecteur directeur sont libres. Deux systèmes différents peuvent décrire la même droite.

Méthode 4 — Tester l'appartenance d'un point

Quand ? « Le point M appartient-il à d ? » — et, sous une autre forme, dans toute recherche d'intersection.

1. Remplacer les coordonnées de M dans la représentation paramétrique.
2. Résoudre la première ligne en le paramètre.

3. Reporter cette valeur dans les deux autres.
4. Conclure.

Erreur à éviter. Il faut la **même** valeur du paramètre pour les trois lignes. Trois valeurs différentes qui « fonctionnent » chacune de leur côté ne prouvent rien.

Méthode 5 — Étudier une position relative

Quand ? Deux droites, une droite et un plan, deux plans : la démarche ne change pas.

1. Comparer d'abord les **vecteurs directeurs**.
2. S'ils sont colinéaires : parallèles. Reste à savoir si les objets sont confondus — tester un point de l'un dans l'autre.
3. Sinon, écrire le système d'identification avec **deux paramètres distincts**.
4. Compter les solutions : **une** $\to$ sécants ; **aucune** $\to$ non coplanaires (deux droites) ou strictement parallèles ; une **infinité** $\to$ confondus ou incluse.

Bon réflexe. Avant tout calcul, comparez les vecteurs directeurs. Colinéaires, le système est inutile : la réponse est déjà là.

Erreur à éviter. Croire que deux droites non parallèles se coupent. Vrai dans le plan, **faux** dans l'espace : elles peuvent être non coplanaires. C'est le piège numéro un du chapitre.

Astuce. Un paramètre par objet : t pour la première droite, s pour la seconde. Employer t deux fois revient à imposer que les deux points soient atteints « en même temps » — et fait rater des intersections.

Méthode 6 — Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan

Quand ? Sections planes d'un solide, point percé par une diagonale, problèmes de type baccalauréat.

1. Écrire la droite avec t, le plan avec $(u\,;v)$.
2. Identifier les trois coordonnées : trois équations, trois inconnues.
3. Résoudre — commencer par l'équation la plus pauvre en inconnues.
4. Reporter la valeur de t dans la droite pour obtenir le point.
5. Vérifier que le point obtenu appartient bien aux deux objets.

Astuce. Dans un cube de repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, tous les sommets ont des coordonnées valant 0 ou 1. Le système devient arithmétique : plus de fractions avant la fin.

Méthode 7 — Démontrer un parallélisme droite-plan

Quand ? « Démontrer que (EG) est parallèle au plan (ABC) » — très fréquent sur les figures de solides.

1. Calculer un vecteur directeur $\vec{w}$ de la droite.
2. Montrer que $\vec{w}$ se décompose sur les deux vecteurs directeurs du plan — ou, plus rapide, qu'il est colinéaire à un vecteur du plan.
3. Exhiber un point de la droite **n'appartenant pas** au plan.
4. Conclure au parallélisme **strict**.

Erreur à éviter. S'arrêter à l'étape 2. Sans le point extérieur, la droite pourrait être **incluse** dans le plan : la démonstration est incomplète et le point de rédaction est perdu.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

× Erreur	✓ Bon réflexe
Conclure à la colinéarité sur deux coordonnées	Il en faut trois
Utiliser le même paramètre pour deux droites	t pour l'une, s pour l'autre
Oublier de vérifier la troisième équation	Les deux premières peuvent avoir une solution que la troisième invalide
Croire que deux droites non parallèles se coupent	Faux dans l'espace : elles peuvent être non coplanaires
Parler de « la » représentation paramétrique	Il y en a une infinité
Choisir deux vecteurs directeurs colinéaires pour un plan	La définition 6.11 l'interdit — on n'obtiendrait qu'une droite

Module Python — colinéarité et coplanarité

```
# Colinearite, coplanarite et intersection
def colineaires(u, v):
   # les coordonnees du produit vectoriel sont toutes nulles
   c1 = u[1] * v[2] - u[2] * v[1]
   c2 = u[2] * v[0] - u[0] * v[2]
   c3 = u[0] * v[1] - u[1] * v[0]
   return c1 == 0 and c2 == 0 and c3 == 0
def determinant(u, v, w):
   return (u[0] * (v[1] * w[2] - v[2] * w[1])
      - u[1] * (v[0] * w[2] - v[2] * w[0])
      + u[2] * (v[0] * w[1] - v[1] * w[0]))
u = [3, -2, -2]
v = [-3, 2, 2]
print("u = (3, -2, -2) et v = (-3, 2, 2) :", colineaires(u, v))
u = [1, 2, 3]
v = [2, 4, 7]
print("u = (1, 2, 3) et v = (2, 4, 7) :", colineaires(u, v))
print()
d = determinant([1, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 2, 1])
print("(1,1,0), (0,1,1), (1,2,1) :  det =", d, " coplanaires :", d
== 0)
d = determinant([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])
print("(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) :  det =", d, " coplanaires :", d
== 0)
```

Trace d'exécution.

```
u = (3, -2, -2) et v = (-3, 2, 2) :  True
u = (1, 2, 3) et v = (2, 4, 7) :  False
(1,1,0), (0,1,1), (1,2,1) :  det = 0 coplanaires :  True
(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) :  det = 1 coplanaires :  False
```

Interprétation mathématique. Le premier test confirme $\vec{v} = -\vec{u}$: les deux vecteurs sont colinéaires. Le second est instructif — les **deux premières** coordonnées sont proportionnelles, $2 = 2 \times 1$ et $4 = 2 \times 2$, mais pas la troisième, $7 \neq 2 \times 3$. Le produit vectoriel $(2\,;-1\,;0)$ n'est pas nul, et il détecte précisément cet écart. C'est l'illustration de l'avertissement du §4 : **dans l'espace, deux égalités sur trois ne concluent rien.**
Le déterminant nul du troisième test signale la coplanarité ; le déterminant 1 du quatrième confirme que la base canonique n'est pas coplanaire — c'est bien une base.

Attention

Produit vectoriel et déterminant **ne figurent pas au programme**. Ils sont utilisés ici uniquement comme outils de vérification numérique, jamais dans une rédaction. Les méthodes 1 et 2 restent les seules attendues.