Chapitre 7. Cours

Épreuves successives, schéma de Bernoulli et loi binomiale

1. Probabilités conditionnelles — rappels

Les coefficients binomiaux du chapitre 4 comptaient des chemins. Ils vont maintenant peser des probabilités — et le décompte des chemins d'un arbre devient la loi la plus utilisée de toutes les mathématiques appliquées.

Définition 7.1 — Probabilité conditionnelle

Pour $P(A) \neq 0$, la probabilité de B **sachant** A est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Propriété 7.2 — Formule des probabilités totales

Si $A_1, \dots, A_n$ forment une **partition** de l'univers :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = P(A_1)\,P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_n)\,P_{A_n}(B).$$

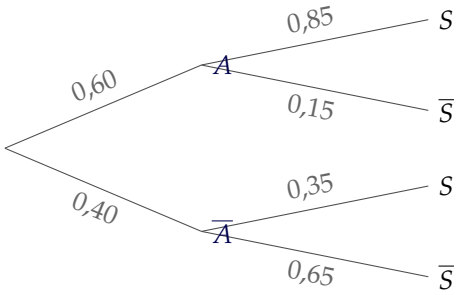


Figure 1 — Arbre pondéré à deux niveaux : les probabilités du second niveau sont conditionnelles.

Exercice d'application 1

Avec l'arbre de la figure 1, calculer $P(S)$**.**

Solution. Deux chemins mènent à S ; on multiplie le long de chaque chemin, puis on additionne :

$$P(S) = 0{,}60 \times 0{,}85 + 0{,}40 \times 0{,}35 = 0{,}51 + 0{,}14 = 0{,}65.$$

Définition 7.3 — Indépendance

A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarque — Bon réflexe

Sur un arbre pondéré, on **multiplie** le long d'un chemin et l'on **additionne** les chemins qui mènent au même événement. Ces deux gestes suffisent à presque tout le chapitre.

Attention — Erreur à éviter

Confondre $P_A(B)$ et $P(A \cap B)$. La première est une probabilité dans l'univers **réduit à** A ; la seconde se rapporte à l'univers entier. Le rapport entre les deux est $P(A)$.

2. Succession d'épreuves indépendantes

Définition 7.4 — Succession d'épreuves indépendantes

Une **succession de n épreuves indépendantes** est une expérience où chaque épreuve se déroule dans les mêmes conditions, sans que son résultat dépende des précédents.

Propriété 7.5 — Probabilité d'une liste de résultats

La probabilité d'une liste de résultats est le **produit** des probabilités de chaque résultat.

Exercice d'application 2

On lance trois fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité de la liste (6 ; pas 6 ; 6) ?

Solution. Les trois lancers sont indépendants ; on multiplie :

$$P = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}.$$

3. Épreuve et schéma de Bernoulli

Définition 7.6 — Épreuve et schéma de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre p est une expérience à deux issues : le **succès**, de probabilité p, et l'échec, de probabilité $1 - p$.
Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et **indépendantes**.

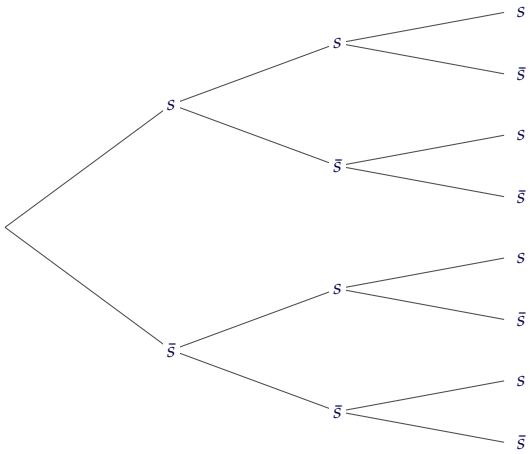


Figure 2 — Un schéma de Bernoulli à trois répétitions : $2^3 = 8$ chemins ; $\binom{3}{k}$ en comptent k succès.

Propriété 7.7 — Reconnaître un schéma de Bernoulli

Trois conditions, toutes obligatoires :
1. chaque épreuve n'a que **deux** issues ;
2. les épreuves sont **identiques** : p ne change pas ;
3. les épreuves sont **indépendantes**.

Exercice d'application 3

a. On lance 10 fois un dé équilibré et l'on compte les 6 obtenus. Est-ce un schéma de Bernoulli ?
b. Même question pour 4 tirages* sans remise *dans une urne de 5 boules rouges et 3 bleues, en comptant les rouges.

Solution.
a. Oui : deux issues (« obtenir 6 » ou non), même probabilité $p = \dfrac{1}{6}$ à chaque lancer, lancers indépendants.
b. Non : sans remise, la composition de l'urne change à chaque tirage — les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes.

Attention — Erreur à éviter

Un tirage **sans remise** viole la deuxième et la troisième condition : la composition de l'urne change. Ce n'est pas un schéma de Bernoulli, et la loi binomiale ne s'applique pas.

4. Loi binomiale

Définition 7.8 — Loi binomiale

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, la variable aléatoire X comptant le **nombre de succès** suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n\,;p)$.

Théorème 7.9 — Formule de la loi binomiale

Pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Lecture de la formule. $\binom{n}{k}$ compte les **chemins** de l'arbre menant à k succès ; $p^k(1-p)^{n-k}$ est la probabilité d'un chemin. C'est exactement le dénombrement du chapitre 4.

Exercice d'application 4

X suit la loi $\mathcal{B}\left(4\,;\frac{1}{2}\right)$. Calculer $P(X=2)$ sous forme de fraction irréductible.

Solution. On applique la formule avec $n=4$, $k=2$ et $p=\frac{1}{2}$:

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\times\frac{1}{16}=\frac{3}{8}.$$

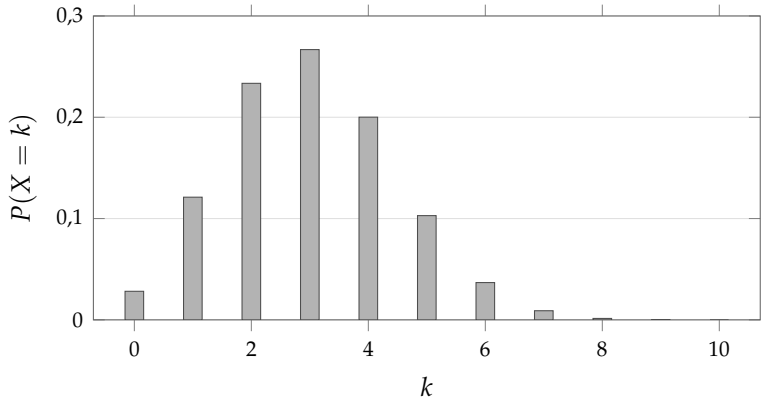


Figure 3 — Loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$: le mode est atteint en $k=3$, proche de $np=3$.

Théorème 7.10 — Espérance, variance, écart-type

Si X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$:

$$E(X)=np \qquad V(X)=np(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}.$$

Interprétation. $E(X)=np$ est le nombre **moyen** de succès sur un grand nombre de répétitions de l'expérience entière. Sur 200 lancers d'une pièce équilibrée, on attend 100 piles.

Exercice d'application 5

X suit la loi $\mathcal{B}(50\,;0{,}4)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Solution. On applique les trois formules :

$$E(X)=50\times0{,}4=20 \qquad V(X)=50\times0{,}4\times0{,}6=12 \qquad \sigma(X)=\sqrt{12}=2\sqrt{3}\approx3{,}46.$$

5. Calculs pratiques

Propriété 7.11 — Les trois formulations à traduire

$$P(X\leqslant k)\text{ : probabilité cumulée} \qquad P(X>k)=1-P(X\leqslant k)$$
$$P(X\geqslant k)=1-P(X\leqslant k-1).$$

Exercice d'application 6

X suit la loi $\mathcal{B}(20\,;0{,}1)$.
***a.** Calculer $P(X \geqslant 1)$, arrondie au millième.* ***b.** Exprimer $P(X > 3)$ à l'aide d'une probabilité cumulée.*

Solution.
a. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^{20} \approx 0{,}878$.
b. $P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 3)$ — la valeur 3 reste dans l'événement complémentaire.

Attention — Erreur à éviter

Le décalage d'une unité entre $P(X \geqslant k)$ et $1 - P(X \leqslant k)$. La bonne écriture est $1 - P(X \leqslant k-1)$: la valeur k elle-même appartient à l'événement.

Remarque — Astuce

« Au moins un succès » se calcule toujours par le complémentaire :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n.$$

Un seul terme au lieu de n.

6. Problèmes de seuil

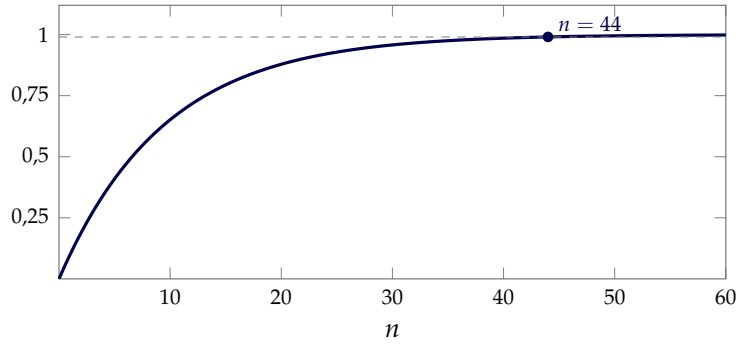


Figure 4 — « Au moins un succès » : $1-(1-p)^n$ franchit le seuil 0,99 pour $n = 44$ lorsque $p = 0{,}1$.

La démarche, toujours la même :
1. traduire l'énoncé en une inégalité portant sur n ;
2. se ramener à $(1-p)^n < s$ lorsque la question porte sur « au moins un succès » ;
3. appliquer le logarithme, puis diviser par $\ln(1-p)$ en **changeant le sens**, ce coefficient étant négatif ;
4. conclure par le plus petit entier convenable et **vérifier** sur n et $n-1$.

Exercice d'application 7

Un tirage réussit avec la probabilité $p = 0{,}1$. Combien de tirages indépendants faut-il pour que la probabilité d'au moins un succès dépasse 0,99 ?

Solution. On veut $1 - 0{,}9^n > 0{,}99$, c'est-à-dire $0{,}9^n < 0{,}01$. Le logarithme donne

$$n\ln(0{,}9) < \ln(0{,}01) \iff n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9)} \approx 43{,}7,$$

le sens changeant car $\ln(0{,}9) < 0$. Le plus petit entier convenable est $n = 44$.
Vérification : $1 - 0{,}9^{44} \approx 0{,}990 > 0{,}99$ ✓ et $1 - 0{,}9^{43} \approx 0{,}989 < 0{,}99$ ✓.

Remarque — Bon réflexe

Le calcul par logarithme et l'algorithme de seuil doivent donner le **même** entier. Quand les deux sont demandés, c'est une vérification gratuite.

Méthodes

Méthode 1 — Exploiter un arbre pondéré

1. Construire l'arbre : une branche par issue, pondérée par sa probabilité.
2. Vérifier que la somme des probabilités partant d'un même nœud vaut 1.
3. **Multiplier** le long d'un chemin pour obtenir la probabilité d'une intersection.
4. **Additionner** les chemins menant au même événement — c'est la formule des probabilités totales.

Exemple éclair. Sur la figure 1 : $P(A \cap S) = 0{,}60 \times 0{,}85 = 0{,}51$, puis $P(S) = 0{,}51 + 0{,}40 \times 0{,}35 = 0{,}65$.
Erreur à éviter. Les probabilités portées sur les branches de deuxième niveau sont **conditionnelles**. Écrire $P(B)$ au lieu de $P_A(B)$ fausse toute la suite.

Méthode 2 — Reconnaître un schéma de Bernoulli

1. Nommer l'épreuve élémentaire et son succès.
2. Vérifier les **trois** conditions : deux issues, épreuves identiques, indépendance.
3. Nommer la variable aléatoire et dire ce qu'elle compte.
4. Conclure : « X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ ».

Exemple éclair. On lance 8 fois une pièce équilibrée, X compte les piles : deux issues, $p = \dfrac{1}{2}$ constant, lancers indépendants — X suit $\mathcal{B}\left(8\,;\dfrac{1}{2}\right)$.
Erreur à éviter. Cette identification vaut souvent 1,5 point à elle seule, et conditionne tout le reste de l'exercice. Ne l'expédiez pas en une ligne.

Méthode 3 — Calculer une probabilité binomiale

1. Identifier n, p et la valeur k demandée.
2. Traduire l'énoncé : « exactement », « au moins », « au plus ».
3. Appliquer la formule, ou la calculatrice pour les probabilités cumulées.
4. Arrondir **à la précision demandée**, en donnant l'écriture exacte au préalable.

Exemple éclair. $X \sim \mathcal{B}(5\,;0{,}3)$:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}3^2 \times 0{,}7^3 = 10 \times 0{,}09 \times 0{,}343 \approx 0{,}309.$$

Erreur à éviter. Oublier le coefficient $\binom{n}{k}$: il compte les chemins, il ne se devine pas.

Méthode 4 — Utiliser espérance et écart-type

1. Vérifier que X suit bien une loi binomiale.
2. Appliquer $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
3. **Interpréter** dans le contexte : nombre moyen de succès, dispersion autour de cette moyenne.
4. Ne pas confondre variance et écart-type : l'écart-type est la racine.

Exemple éclair. $X \sim \mathcal{B}(100\,;0{,}2)$: $E(X) = 20$ et $\sigma(X) = \sqrt{16} = 4$.
Erreur à éviter. L'espérance se calcule en une opération. Si vous obtenez une valeur hors de $[0\,;n]$, l'erreur est dans les paramètres, pas dans la formule.

Méthode 5 — Résoudre un problème de seuil

1. Traduire la question en inégalité, en passant par le complémentaire si elle porte sur « au moins un ».
2. Obtenir $(1-p)^n < s$.
3. Appliquer le logarithme et diviser par $\ln(1-p) < 0$, en **inversant** l'inégalité.
4. Prendre le plus petit entier convenable et vérifier sur deux entiers consécutifs.

Exemple éclair. $1 - 0{,}5^n > 0{,}95 \iff 0{,}5^n < 0{,}05 \iff n > \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}5)} \approx 4{,}32$: donc $n = 5$.
Erreur à éviter. Oublier l'inversion du sens. $\ln(1-p)$ est **toujours** négatif puisque $0 < 1-p < 1$. L'erreur donne une réponse plausible et fausse.

Méthode 6 — Justifier une modélisation, ou la réfuter

Quand ? L'énoncé demande si la loi binomiale s'applique, ou propose une situation qui n'en relève pas.
1. Reprendre les trois conditions une par une.
2. Pour un tirage, distinguer **avec** et **sans** remise : sans remise, p change à chaque tirage.
3. Si l'une des conditions tombe, le dire explicitement et nommer laquelle.
4. Le cas échéant, proposer le modèle correct — arbre pondéré, ou dénombrement direct.

Exemple éclair. Urne de 5 rouges et 3 bleues, 4 tirages **sans remise** : p change à chaque tirage, la loi binomiale ne s'applique pas — on modélise par un arbre.
Erreur à éviter. Un grand nombre d'exercices de baccalauréat commencent par une question de modélisation. Répondre « oui, c'est une loi binomiale » sans vérifier les trois conditions ne rapporte rien, même quand la réponse est juste.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Erreur	Bon réflexe
Appliquer la loi binomiale à un tirage sans remise	L'indépendance est perdue
Écrire $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X \leqslant 4)$	C'est $1 - P(X \leqslant 3)$
Oublier le coefficient $\binom{n}{k}$	Il compte les chemins, il ne se devine pas
Confondre n et k dans la formule	n est le nombre de répétitions, k celui des succès
Ne pas vérifier les trois conditions du schéma	Elles font partie de la rédaction attendue
Oublier d'inverser l'inégalité en divisant par $\ln(1-p)$	Ce logarithme est négatif

Module Python — simulation d'un schéma de Bernoulli

```
# Simulation d'un schema de Bernoulli
from random import random
def combinaison(n, k):
   resultat = 1
   for i in range(k):
      resultat = resultat * (n - i) // (i + 1)
   return resultat
def proba_binomiale(n, p, k):
   return combinaison(n, k) * p ** k * (1 - p) ** (n - k)
def simule_binomiale(n, p, nb_essais):
   # frequences observees de X = 0, 1, ..., n
   effectifs = [0] * (n + 1)
   for essai in range(nb_essais):
      succes = 0
      for i in range(n):
         if random() < p:
            succes = succes + 1
      effectifs[succes] = effectifs[succes] + 1
   return [effectifs[k] / nb_essais for k in range(n + 1)]
n = 10
p = 0.3
print("Loi B(10 ; 0.3) :  simulation sur 10 000 essais")
frequences = simule_binomiale(n, p, 10000)
for k in range(7):
   proba = proba_binomiale(n, p, k)
   f = round(frequences[k], 4)
   print("k =", k, " frequence :", f, " proba :", round(proba, 4))
print("esperance theorique n*p =", n * p)
print("ecart-type theorique =", round((n * p * (1 - p)) ** 0.5, 6))
```

Trace d'exécution *(les fréquences varient d'une exécution à l'autre).*

```
Loi B(10 ; 0.3) :  simulation sur 10 000 essais
k = 0 frequence :  0.0279 proba :  0.0282
k = 1 frequence :  0.1185 proba :  0.1211
k = 2 frequence :  0.2356 proba :  0.2335
k = 3 frequence :  0.2673 proba :  0.2668
k = 4 frequence :  0.2002 proba :  0.2001
k = 5 frequence :  0.1029 proba :  0.1029
k = 6 frequence :  0.0365 proba :  0.0368
esperance theorique n*p = 3.0
ecart-type theorique = 1.449138
```

Interprétation mathématique. Sur les sept premières valeurs, les fréquences observées en 10 000 essais approchent les probabilités théoriques à quelques millièmes près, et le mode de la loi est atteint en $k = 3$ sur les deux colonnes — ce qui coïncide avec l'espérance $np = 3$ rappelée en avant-dernière ligne. Relancez le programme : les fréquences changent à chaque exécution, les probabilités jamais. C'est toute la différence entre une observation et un calcul.

Attention

Une simulation ne démontre rien. Elle illustre la loi et rend crédible la formule du théorème 7.9, mais les écarts observés varient à chaque exécution. La justification de cette convergence — pourquoi les fréquences se rapprochent des probabilités — est précisément l'objet du **chapitre 14**.