Devoir surveillé n°9 · 20 janvier 2025

Dénombrement, probabilités conditionnelles et loi binomiale

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Exercice 1 — Dénombrement (5 points)

Un club compte 18 membres : 10 femmes et 8 hommes.

1. On constitue un bureau de 3 membres ayant chacun une fonction distincte (président, trésorier, secrétaire). Combien de bureaux différents peut-on former ?
2. On constitue maintenant une délégation de 4 membres, sans distinction de fonction. Combien de délégations différentes ?
3. Combien de délégations comportent exactement 2 femmes ?
4. Combien de délégations comportent au moins une femme ?

Exercice 2 — Probabilités conditionnelles (5 points)

Une usine possède deux chaînes de production A et B. La chaîne A fabrique 60 % des pièces, la chaîne B le reste. On sait que 3 % des pièces issues de A sont défectueuses et 5 % de celles issues de B. On prélève une pièce au hasard ; on note A, B et D les événements correspondants.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(A \cap D)$.
3. Montrer que $P(D) = 0{,}038$.
4. Une pièce prélevée est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de la chaîne B ? Arrondir à 10^{-3}.

Exercice 3 — Loi binomiale (6 points)

On reprend la situation de l'exercice 2 : la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est 0,038. On prélève au hasard 50 pièces dans un stock très important ; on note X le nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geqslant 1)$ à 10^{-3} près.
3. Calculer $P(X \leqslant 3)$ à 10^{-3} près.
4. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$, puis interpréter l'espérance.
5. On prélève maintenant n pièces. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une pièce défectueuse dépasse 0,95. Détailler la résolution.

Exercice 4 — Variable aléatoire et jeu (4 points)

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules rouges. On tire simultanément 2 boules. Le joueur gagne 5 € par boule verte tirée et perd 4 € par boule rouge tirée. On note G le gain algébrique.

1. Déterminer les valeurs prises par G.

2. Déterminer la loi de probabilité de G.
3. Calculer $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?