Chapitre 7. Fiche d'exercices n°1

Épreuves successives, schéma de Bernoulli et loi binomiale

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Une professeure pose une question à un élève, qui doit choisir parmi trois réponses dont une seule est juste. L'élève ne connaît que 60 % de son cours : si la question porte sur ce qu'il connaît, il répond juste ; sinon il répond au hasard. On note C : « la question est dans la partie connue » et J : « l'élève répond juste ».

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Donner $P_C(J)$ et $P_{\overline{C}}(J)$.

c. Calculer $P(J)$.

Exercice 2 ⋆

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$. Calculer, à 10^{-3} près : a. $P(X = 0)$ b. $P(X = 3)$ c. $P(X \geqslant 1)$ d. $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3 ⋆

Soit X la variable aléatoire de loi donnée par le tableau suivant.

k	-2	-1	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Déterminer $P(X \leqslant 0)$, $P(X < 2)$, $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4 ⋆

Dans chaque cas, dire si la variable aléatoire suit une loi binomiale ; si oui, préciser ses paramètres.

a. On lance 20 fois un dé équilibré ; X compte le nombre de 6 obtenus.

b. On tire successivement et *sans remise* 3 boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 5 noires ; X compte les rouges.

c. On interroge 150 personnes au hasard dans une grande ville ; X compte celles qui sont allergiques (8 % de la population).

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 5 ⋆⋆

Une entreprise contrôle un parc de trottinettes. La probabilité qu'une trottinette soit en bon état est 0,8, indépendamment des autres. On note X le nombre de trottinettes en bon état dans un lot de 15.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
b. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
c. Calculer $P(X \geqslant 10)$ à 10^{-4} près.
d. Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 6 ⋆⋆

Dans une région, 2 % des vaches présentent un test positif. On prélève un échantillon de 100 vaches, assimilé à un tirage avec remise ; X compte les tests positifs.
a. Préciser la loi de X.
b. Calculer $P(X = 3)$ et $P(X \leqslant 3)$ à 10^{-3} près.
c. Pour un échantillon de n vaches, déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins une vache soit testée positive dépasse 0,99.

Exercice 7 ⋆⋆

X suit $\mathcal{B}(150\,;0{,}08)$.
a. Calculer $P(X = 20)$ à 10^{-3} près.
b. Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes interrogées soient concernées.

Exercice 8 ⋆⋆

Un jeu vidéo attribue un objet rare avec la probabilité 0,07. Un joueur remporte 30 défis ; X compte les objets rares obtenus.
a. Préciser la loi de X et calculer $E(X)$.
b. Calculer $P(X < 6)$ à 10^{-3} près.
c. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0{,}5$ et interpréter.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 9 ⋆⋆⋆

Une plateforme constate que 7 % de ses abonnés résilient chaque mois. On interroge N abonnés au hasard (tirage assimilé à un tirage avec remise).
a. Exprimer en fonction de N la probabilité q_N qu'au moins un abonné ait résilié.
b. Déterminer le plus petit entier N tel que $q_N \geqslant 0{,}95$, en détaillant la résolution.
c. Écrire une fonction Python renvoyant ce seuil.

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Un test de dépistage vérifie : $P_M(T) = 0{,}999$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}005$, où M : « l'individu est malade » et T : « le test est positif ». On note $p = P(M)$.
a. Exprimer $P(T)$ en fonction de p.
b. Montrer que $P_T(M) = \dfrac{999p}{994p + 5}$.
c. Pour quelles valeurs de p a-t-on $P_T(M) > 0{,}95$?

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Une médiathèque estime que 6 % de ses DVD sont défectueux. Elle teste un échantillon de 150 DVD ; X compte les défectueux.

a. Préciser la loi de X, puis calculer $E(X)$.

b. On donne $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}019$ et $P(X \leqslant 4) \approx 0{,}050$; $P(X \leqslant 14) \approx 0{,}963$ et $P(X \leqslant 15) \approx 0{,}981$. En déduire le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

c. En déduire un intervalle $I = [a; b]$ tel que $P(X \in I) \geqslant 0{,}95$.

d. Sur l'échantillon, 14 DVD sont défectueux. Peut-on rejeter, au seuil de 95 %, l'hypothèse selon laquelle 6 % des DVD sont défectueux ?

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 12 ⋆⋆⋆⋆

X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$. Démontrer que $P(X = k+1) = \dfrac{n-k}{k+1} \times \dfrac{p}{1-p} \times P(X = k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ (avec $p \neq 1$).

Exercice 13 ⋆⋆⋆⋆

Compléter les deux fonctions Python ci-dessous, où `binompdf(n,p,k)` renvoie $P(X = k)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

```
def borne_inf():
  a = 0
  pc = binompdf(150,0.06,0)
  while pc ......  0.025:
    a = a + 1
    pc = ............
  return a
```

```
def borne_sup():
  b = 0
  pc = binompdf(150,0.06,0)
  while pc ......  0.975:
    b = b + 1
    pc = ............
  return b
```

Exercice 14 ⋆⋆⋆⋆

X suit $\mathcal{B}(n\,;0{,}5)$. Démontrer que $P(X = k) = P(X = n-k)$ pour tout k, et interpréter cette symétrie.

Exercice 15 ⋆⋆⋆⋆

On lance n fois une pièce équilibrée. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une fois « pile » dépasse 0,999.