LOGARITHME népérien

Définition

- ln = réciproque de exp sur $]0;+\infty[$
- $e^{\ln x} = x$ $(x > 0)$; $\ln(e^x) = x$
- $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$
- $\ln x = y \iff x = e^y$

Algèbre

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
- Jamais $\ln(a+b)$!

Équations et inéquations

- Ensemble de définition d'abord
- ln strictement croissante : $\ln a < \ln b \iff a < b$
- $q^n \leqslant \varepsilon \iff n \ln q \leqslant \ln \varepsilon$
- Diviser par $\ln q < 0$ inverse l'inégalité

Dérivée et variations

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- Strictement croissante, concave sur $]0;+\infty[$
- $\ln x \leqslant x - 1$
- Tangente en 1 : $y = x - 1$

Limites

- $\lim_{0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée)
- $\lim_{0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Seuils et modélisation

- $u_n = u_0 q^n$: rang tel que $u_n < \varepsilon$
- $n > \frac{\ln(\varepsilon / u_0)}{\ln q}$ puis vérifier l'entier
- Python : boucle et `log` concordent
- Décroissance radioactive, demi-vie

Chapitre 8 · Les trois réflexes : domaine, résolution, vérification ; produits → sommes ; $\ln q < 0$ inverse.