Chapitre 8. Cours

Fonction logarithme népérien

1. Définition

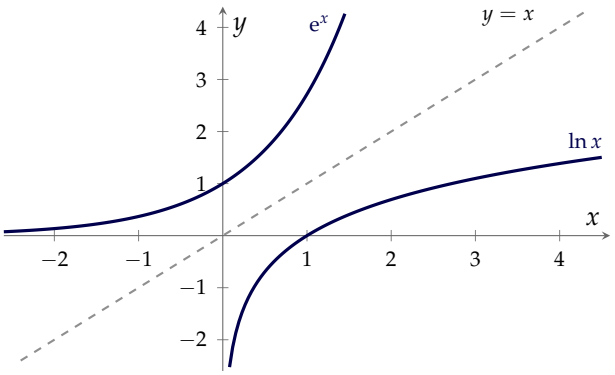


Figure 1 — Exponentielle et logarithme, symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Définition 8.1 — Logarithme népérien

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est définie sur $]0\,;+\infty[$ comme la réciproque de la fonction exponentielle :

$$\text{pour } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}, \qquad \ln x = y \iff x = \mathrm{e}^{y}.$$

Propriété 8.2 — Valeurs et réciprocité

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln \mathrm{e} = 1 \qquad \mathrm{e}^{\ln x} = x \text{ pour } x > 0 \qquad \ln\left(\mathrm{e}^{x}\right) = x \text{ pour tout } x.$$

Exercice d'application 1

Simplifier $\mathrm{e}^{2\ln 3}$ ***et*** $\ln\left(\mathrm{e}^{5}\right)$.

Solution. $\mathrm{e}^{2\ln 3} = \left(\mathrm{e}^{\ln 3}\right)^{2} = 3^{2} = 9$, et $\ln\left(\mathrm{e}^{5}\right) = 5$.

Attention — Erreur à éviter

$\ln x$ n'existe que pour $x > 0$. Avant toute résolution, écrivez l'**ensemble de définition** : c'est lui qui élimine les fausses solutions à la fin.

2. Propriétés algébriques

Théorème 8.3 — Propriétés algébriques

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout entier n :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \qquad \ln\left(a^n\right) = n\ln a \qquad \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a.$$

Exercice d'application 2

Exprimer en fonction de $\ln 2$ ***et*** $\ln 3$ ***:*** ***a.*** $\ln 12$ ***b.*** $\ln\dfrac{1}{8}$ ***c.*** $\ln\sqrt{3}$***.***

Solution.
a. $\ln 12 = \ln(4\times 3) = 2\ln 2 + \ln 3$.
b. $\ln\dfrac{1}{8} = -\ln 8 = -3\ln 2$.
c. $\ln\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\ln 3$.

Remarque — Bon réflexe

Le logarithme **transforme les produits en sommes et les puissances en produits**. C'est exactement l'opération inverse de l'exponentielle, et c'est ce qui permet de faire descendre une inconnue d'un exposant.

Attention — Erreur à éviter

$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$. Il n'existe **aucune** formule pour le logarithme d'une somme.

3. Variations et limites

Théorème 8.4 — Stricte croissance

ln est **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$. Par conséquent, pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\ln a = \ln b \iff a = b \qquad \ln a < \ln b \iff a < b.$$

Exercice d'application 3

Résoudre l'inéquation $\ln x < \ln(3-x)$***.***

Solution. Ensemble de définition : $x > 0$ **et** $3 - x > 0$, soit $]0\,;3[$.
La stricte croissance transforme l'inéquation en $x < 3 - x$, soit $x < \dfrac{3}{2}$.
Avec l'ensemble de définition : $\mathcal{S} = \left]0\,;\dfrac{3}{2}\right[$.

Propriété 8.5 — Limites aux bornes

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

L'axe des ordonnées est **asymptote verticale** à la courbe.

Exercice d'application 4

Déterminer les limites de $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ***en*** $+\infty$ ***et en*** 0^+**.**

Solution. En $+\infty$: $1+\dfrac{1}{x} \to 1$ et, par composition, $f(x) \to \ln 1 = 0$.
En 0^+ : $1+\dfrac{1}{x} \to +\infty$ et, par composition, $f(x) \to +\infty$.

Remarque — Astuce

La stricte croissance autorise à « enlever les ln » d'une équation ou d'une inéquation — mais seulement après avoir vérifié que les deux membres sont strictement positifs.

4. Dérivée

Théorème 8.6 — Dérivée

ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Plus généralement, si u est dérivable et strictement positive sur I :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Exercice d'application 5

Dériver $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ ***sur*** $\mathbb{R}$ ***et en déduire ses variations.***

Solution. $x^2+1 > 0$ sur $\mathbb{R}$, et avec $u(x) = x^2+1$:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1},$$

du signe de x. Donc f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Remarque — Bon réflexe

$u > 0$ étant exigé, le signe de $(\ln u)'$ est celui de u' seul. Étudier les variations de $\ln u$ revient donc à étudier celles de u.

5. Concavité et inégalité fondamentale

Théorème 8.7 — Concavité

$\ln''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: la fonction ln est **concave** sur $]0\,;+\infty[$. Sa courbe est donc située sous chacune de ses tangentes.

Propriété 8.8 — Inégalité fondamentale

$$\ln x \leqslant x - 1 \quad \text{pour tout } x > 0, \text{ avec égalité si et seulement si } x = 1.$$

C'est la tangente en 1, d'équation $y = x - 1$, qui majore la courbe.

Exercice d'application 6

Démontrer l'inégalité fondamentale par une étude de fonction.

Solution. Posons $g(x) = x - 1 - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. Alors

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

négative sur $]0\,;1]$, positive sur $[1\,;+\infty[$: g admet un minimum en 1, et $g(1) = 0$.
Donc $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $\ln x \leqslant x - 1$, avec égalité seulement en $x = 1$.

Remarque — Astuce

Cette inégalité est le passe-partout des majorations avec logarithme. En posant $x = 1 + h$, elle s'écrit aussi $\ln(1+h) \leqslant h$.

6. Croissances comparées

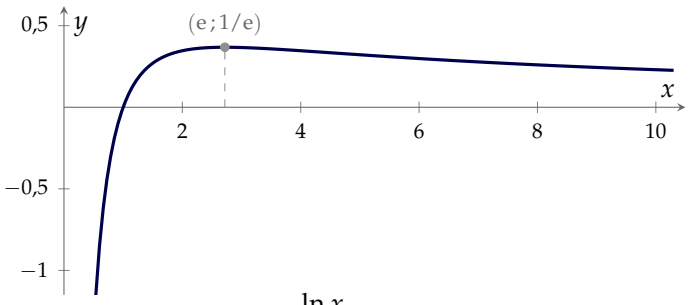


Figure 2 — La fonction $\dfrac{\ln x}{x}$ et son maximum en $x = \mathrm{e}$.

Théorème 8.9 — Croissances comparées

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et plus généralement, pour tout entier } n \geqslant 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0.$$

Exercice d'application 7

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$**.**

Solution. C'est la forme indéterminée $\infty-\infty$. On factorise par le terme dominant :

$$x-\ln x = x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right).$$

Par croissances comparées, $\dfrac{\ln x}{x}\to 0$: la parenthèse tend vers 1, et $x-\ln x\to+\infty$.

Remarque — À retenir en une phrase

La puissance l'emporte toujours sur le logarithme. En $+\infty$ elle domine au dénominateur ; en 0^+ elle écrase la divergence de ln.

Attention — Erreur à éviter

Conclure « $\frac{\infty}{\infty}$ donc 1 ». Une forme indéterminée n'a pas de valeur par défaut : c'est le théorème des croissances comparées qui tranche, et il faut le citer.

7. Application : résolution d'un seuil

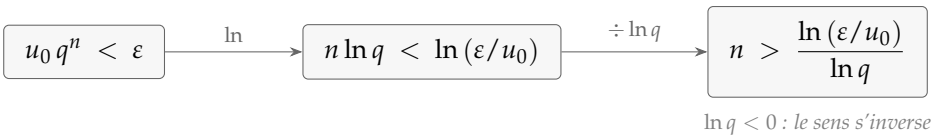


Figure 3 — Résoudre un seuil : de l'algorithme au calcul.

Le logarithme sert à faire descendre l'inconnue d'un exposant. Pour $q>0$ et $q\neq 1$:

$$q^n > s \iff n\ln q > \ln s$$

puis on divise par $\ln q$, **en changeant le sens de l'inégalité si** $\ln q<0$, c'est-à-dire si $0<q<1$.

Exercice d'application 8

Déterminer le plus petit entier n ***tel que*** $0{,}9^n<0{,}01$**.**

Solution. $0{,}9^n<0{,}01$ donne $n\ln 0{,}9<\ln 0{,}01$, et comme $\ln 0{,}9<0$:

$$n>\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9}\approx 43{,}7.$$

Le plus petit entier convenable est $n=44$.
Vérification : $0{,}9^{44}\approx 0{,}0097<0{,}01$ ✓ et $0{,}9^{43}\approx 0{,}0108>0{,}01$ ✓.

Attention — Erreur à éviter

Oublier le changement de sens quand la raison est inférieure à 1. C'est l'erreur la plus coûteuse du chapitre : elle donne une réponse plausible mais fausse, et rien dans le résultat ne la signale.

Méthodes

Méthode 1 — Résoudre une équation logarithmique

1. Déterminer l'ensemble de définition : **tous** les arguments doivent être strictement positifs.
2. Ramener l'équation à la forme $\ln A = \ln B$ à l'aide des propriétés algébriques.
3. Utiliser la stricte croissance : $\ln A = \ln B \iff A = B$.
4. Résoudre, puis **écarter** les solutions hors de l'ensemble de définition.

Exemple éclair. $\ln x + \ln(x-2) = \ln 3$ sur $]2\,;+\infty[$ donne $x(x-2) = 3$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$ et $x \in \{-1\,;3\}$. Seul 3 convient.
Erreur à éviter. Résoudre sans avoir posé l'ensemble de définition. La solution -1 ci-dessus est irrecevable : sans l'étape 1, on la garde et on perd les points.

Méthode 2 — Résoudre une inéquation logarithmique

1. Ensemble de définition, comme précédemment.
2. Ramener à $\ln A < \ln B$.
3. La stricte croissance **conserve** le sens : $\ln A < \ln B \iff A < B$.
4. Intersecter l'ensemble des solutions avec l'ensemble de définition.

Exemple éclair. $\ln(2x) \leqslant \ln(x+3)$: définition $x > 0$; puis $2x \leqslant x+3$, soit $x \leqslant 3$: $\mathcal{S} =]0\,;3]$.
Bon réflexe. Le logarithme étant croissant, aucun sens d'inégalité ne change ici. C'est à la **division par** $\ln q$ de la méthode 5 que le piège se trouve, pas à ce niveau.

Méthode 3 — Dériver et étudier $\ln u$

1. Vérifier $u > 0$ sur l'intervalle : c'est la condition d'existence.
2. Écrire $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
3. Le dénominateur étant positif, le signe de la dérivée est celui de u'.
4. Dresser le tableau de variations et calculer les limites aux bornes.

Exemple éclair. $f(x) = \ln(3x+1)$ sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$: $f'(x) = \dfrac{3}{3x+1} > 0$, f est strictement croissante.
Astuce. $\ln u$ varie **comme** u. Si u admet un minimum en a, alors $\ln u$ aussi, et sa valeur est $\ln(u(a))$: plus besoin de refaire l'étude.

Méthode 4 — Lever une indétermination par croissances comparées

1. Identifier la forme indéterminée : $\frac{\infty}{\infty}$ ou $0 \times \infty$.
2. Faire apparaître le quotient de référence $\dfrac{\ln x}{x^n}$ ou le produit $x \ln x$, en factorisant par le terme dominant.
3. Citer le théorème des croissances comparées.
4. Conclure par produit ou somme de limites.

Exemple éclair. $f(x) = x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$. Comme $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$, la parenthèse tend vers 1 et $f(x) \to +\infty$.
Erreur à éviter. Écrire « $\ln x$ négligeable donc on le supprime » sans factorisation ni théorème cité : la rédaction attendue passe par le quotient de référence.

Méthode 5 — Déterminer un seuil par le calcul

1. Écrire l'inéquation sous la forme $q^n > s$ ou $q^n < s$.
2. Appliquer le logarithme aux deux membres, tous deux strictement positifs.
3. Descendre l'exposant : $n \ln q$.
4. Diviser par $\ln q$ en **changeant le sens** si $0 < q < 1$.
5. Conclure par le plus petit entier convenable, et **vérifier** sur n et $n-1$.

Exemple éclair. $0{,}5^n < 0{,}05 : n > \dfrac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}5} \approx 4{,}32$, donc $n = 5$.

Bon réflexe. La vérification finale sur deux entiers consécutifs coûte deux lignes et détecte à coup sûr une erreur de sens. Elle vaut souvent un demi-point à elle seule.

Méthode 6 — Démontrer une inégalité avec ln

Quand ? L'énoncé demande de comparer ln à une expression algébrique, ou de majorer un terme d'une suite.

1. Poser $g(x) =$ membre de droite $-$ membre de gauche.
2. Dériver et étudier le signe de g'.
3. Dresser le tableau de variations et identifier l'extremum.
4. Conclure : si le minimum de g est positif, l'inégalité est démontrée.

Exemple éclair. Pour $\ln x \leqslant x - 1$: $g(x) = x - 1 - \ln x$, $g'(x) = \dfrac{x-1}{x}$, minimum $g(1) = 0$ — c'est l'application 6.

Astuce. Avant de lancer l'étude, testez si l'**inégalité fondamentale** $\ln x \leqslant x - 1$ suffit. Elle règle une bonne moitié des cas en trois lignes, et sa démonstration par la concavité est elle-même une question de cours.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Erreur	Bon réflexe
Écrire $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$	Le logarithme transforme les **produits**, pas les sommes
Oublier l'ensemble de définition	Chaque argument doit être **strictement** positif
Conserver une solution hors du domaine	Étape 4 de la méthode 1, sans exception
Ne pas inverser l'inégalité en divisant par $\ln q < 0$	Pour $0 < q < 1$, $\ln q$ est négatif
Écrire $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x$ sans condition	Vrai si $x > 0$; sinon $\ln\left(x^2\right) = 2\ln\lvert x\rvert$
Confondre $\dfrac{\ln x}{x}$ et $\dfrac{x}{\ln x}$	Le premier tend vers 0, le second vers $+\infty$

Module Python — seuil par le calcul et par algorithme

```
# Seuil par algorithme et par le logarithme
from math import log, ceil
def seuil_par_boucle(u0, q, cible):
  u = u0
  n = 0
  while u >= cible:
     u = u * q
     n = n + 1
  return n
def seuil_par_logarithme(u0, q, cible):
  # q**n < cible/u0 donne n * ln(q) < ln(cible/u0)
  # on divise par ln(q) < 0, donc on inverse l'inegalite
  borne = log(cible / u0) / log(q)
  return ceil(borne)
liste_u0 = [1000, 5000, 1]
liste_q = [0.9, 0.85, 0.5]
liste_cible = [1, 10, 0.001]
for i in range(3):
  u0 = liste_u0[i]
  q = liste_q[i]
  cible = liste_cible[i]
  n1 = seuil_par_boucle(u0, q, cible)
  n2 = seuil_par_logarithme(u0, q, cible)
  print("u0 =", u0, " q =", q, " cible =", cible)
  print(" boucle :", n1, " logarithme :", n2, " accord :", n1 == n2)
```

Trace d'exécution.

```
u0 = 1000 q = 0.9 cible = 1
boucle :  66 logarithme :  66 accord :  True
u0 = 5000 q = 0.85 cible = 10
boucle :  39 logarithme :  39 accord :  True
u0 = 1 q = 0.5 cible = 0.001
boucle :  10 logarithme :  10 accord :  True
```

Interprétation mathématique. Les deux méthodes concordent sur les trois cas. La première réponse — 66 — est exactement celle obtenue par l'algorithme du chapitre 1, mais elle est ici **calculée** et non plus **cherchée**.
Dans le premier cas, la variable *borne* calculée par *seuil_par_logarithme* vaut 65,5630 : c'est le seuil réel, non entier. Le plus petit entier qui le dépasse est 66, d'où l'emploi de *ceil*. La colonne « accord » affiche *True* sur les trois lignes : boucle et logarithme donnent le même rang.

Attention

Un cas limite à connaître. Si la borne tombe exactement sur un entier, *ceil* renvoie cet entier, alors que l'inégalité stricte exige l'entier suivant. Pour $q = 0{,}5$, $u_0 = 1$, $cible = 0{,}25$, la borne vaut exactement 2 et il faut $n = 3$ puisque $0{,}5^2 = 0{,}25$ n'est pas strictement inférieur à 0,25. **Vérifier toujours l'entier trouvé et son prédécesseur**, comme l'impose l'étape 5 de la méthode 5 du présent chapitre.