Devoir surveillé n°6 · 5 février 2022

Fonction logarithme népérien et suites définies implicitement

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Exercice 1 (8 points)

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$.

1. Montrer que l'on a, pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.
2. La fonction φ est définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x) = x+1+\ln x$. Étudier ses variations, en déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β. Étudier le signe de φ.
3. En déduire les variations de f, puis étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique, que l'on notera α_n. On étudie maintenant la suite (α_n).
5. Montrer que, pour tout entier $n > 0$, $f\left(\mathrm{e}^n\right) < n$. En déduire que $\alpha_n > \mathrm{e}^n$, puis la limite de (α_n).
6. Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut se mettre sous la forme $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$. En déduire la limite de $\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 2 (12 points)

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0;+\infty[$ par $f_1(x) = 2x - 2 + \ln\left(x^2+1\right)$.
   a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Déterminer la dérivée de f_1.
   c. Dresser le tableau de variations de f_1.
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$.
   a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
   b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0;+\infty[$.
   d. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n, $0 < \alpha_n < 1$.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.
4. Étude de la suite (α_n).
   a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.
   b. En déduire qu'elle est convergente.
   c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

Devoir surveillé n°6 · 16 janvier 2025

Fonction logarithme népérien

Seules les calculatrices collège et celles en mode examen sont autorisées

Exercice 1 — QCM (6 points)

Pour chaque question, entourer la lettre correspondant à la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

1. L'équation $\ln x + \ln(x-2) = \ln 3$:

   a. est équivalente à l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$
   b. admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$
   c. n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
   d. a une solution unique dans $\mathbb{R}$

2. f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse e a pour équation :

   a. $y = 2(x-\mathrm{e})+1$
   b. $y = -\dfrac{2}{\mathrm{e}}x + 1$
   c. $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x + 1$
   d. $y = \dfrac{2}{\mathrm{e}}x - 1$

3. Soit g la fonction définie sur $]-0{,}25;+\infty[$ par $g(x) = 2x\ln(4x+1)$. Alors, pour tout $x > -0{,}25$, $g'(x)$ est égale à :

   a. $\dfrac{8}{4x+1}$
   b. $2(4x+1)\ln(4x+1) + \dfrac{4x}{4x+1}$
   c. $\dfrac{4x}{2x+0{,}5} + 2\ln(4x+1)$
   d. $\dfrac{2}{4x+1}$

4. L'inéquation $\left(\dfrac{3}{5}\right)^n < 0{,}01$ est équivalente à :

   a. $n > \dfrac{\ln 100}{\ln 5 - \ln 3}$
   b. $n < \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)}$
   c. $n \leqslant 9$
   d. $n \geqslant 10$

5. On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. La suite (u_n) est :

   a. croissante
   b. majorée par 1
   c. minorée par 0
   d. convergente vers 1

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ est égale à :

   a. 1
   b. 2
   c. 0
   d. $+\infty$

Exercice 2 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln\left(1+x^2\right)$.

1. a. Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a $f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. a. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.
   b. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

Exercice 3 (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Étudier les variations de u sur $]0; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$. On note α cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que $f(\alpha) = \alpha^2\left(1 + \alpha^2\right)$.

Exercice 4 (4 points)

(u_n) est la suite définie par $u_0 = \mathrm{e}^3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$. On note (v_n) la suite définie pour tout n par $v_n = \ln u_n - 2$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser son premier terme v_0 et sa raison q.
2. En déduire v_n puis $\ln u_n$ en fonction de n.
3. a. Quelle est la limite de la suite (v_n) ?
   b. En déduire que la suite (u_n) converge vers e^2.