Devoir surveillé n°6 · 5 février 2022

Fonction logarithme népérien et suites définies implicitement

Durée : 1 heure · Calculatrice autorisée

Exercice 1 (8 points)

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$.

1. Montrer que l'on a, pour tout réel x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.
2. La fonction φ est définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x) = x+1+\ln x$. Étudier ses variations, en déduire que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique β. Étudier le signe de φ.
3. En déduire les variations de f, puis étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique, que l'on notera α_n. On étudie maintenant la suite (α_n).
5. Montrer que, pour tout entier $n > 0$, $f\left(\mathrm{e}^n\right) < n$. En déduire que $\alpha_n > \mathrm{e}^n$, puis la limite de (α_n).
6. Prouver que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut se mettre sous la forme $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$. En déduire la limite de $\dfrac{\alpha_n}{\mathrm{e}^n}$.

Exercice 2 (12 points)

1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0;+\infty[$ par $f_1(x) = 2x - 2 + \ln\left(x^2+1\right)$.
   a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   b. Déterminer la dérivée de f_1.
   c. Dresser le tableau de variations de f_1.
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$.
   a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
   b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   c. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[0;+\infty[$.
   d. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n, $0 < \alpha_n < 1$.
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.
4. Étude de la suite (α_n).
   a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.
   b. En déduire qu'elle est convergente.
   c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ pour déterminer la limite de cette suite.