Chapitre 8. Fiche d'exercices n°1

Fonction logarithme népérien

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Simplifier :

a. $\ln\left(e^5\right)$
b. $e^{\ln 7}$
c. $\ln 1 + \ln e$
d. $\ln\left(\dfrac{1}{e^3}\right)$
e. $\ln\sqrt{e}$
f. $\ln 8 - 3\ln 2$

Exercice 2 ⋆

Écrire en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$: a. $\ln 6$ b. $\ln\dfrac{3}{2}$ c. $\ln 12$ d. $\ln\dfrac{9}{16}$.

Exercice 3 ⋆

Déterminer l'ensemble de définition de : a. $f(x) = \ln(3x-6)$ b. $g(x) = \ln\left(x^2-4\right)$ c. $h(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

Exercice 4 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a. $\ln x = 3$ b. $e^x = 5$ c. $\ln(2x-1) = 0$ d. $\ln x \leqslant 1$.

Exercice 5 ⋆

Calculer la dérivée de : a. $f(x) = \ln(5x+2)$ b. $g(x) = x\ln x$ c. $h(x) = \ln\left(x^2+3\right)$ d. $k(x) = (\ln x)^3$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 6 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a. $\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln 4$ b. $2\ln x - \ln(x+3) = 0$ c. $\ln\left(x^2\right) = 2\ln(3-x)$.

Exercice 7 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{N}$: a. $0{,}8^n < 10^{-3}$ b. $1{,}04^n > 2$ c. $500 \times 0{,}95^n < 100$.

Exercice 8 ⋆⋆

Déterminer les limites suivantes. a. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ d. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$.

Exercice 9 ⋆⋆

Soit $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

a. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

b. En déduire le maximum de f et comparer e^{π} et π^{e}.

Exercice 10 ⋆⋆

Une population de bactéries est modélisée par $u_n = 3000\times 1{,}12^n$ (n en heures).

a. Au bout de combien d'heures la population dépasse-t-elle 20 000 ?

b. Écrire une fonction Python `seuil(S)` donnant ce résultat et vérifier la cohérence avec le calcul.

Exercice 11 ⋆⋆

Soit $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $]1;+\infty[$.

c. Déterminer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, puis les asymptotes.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Soit $f(x)=x-\ln x$ sur $]0;+\infty[$.

a. Étudier les variations de f et déterminer ses limites en 0^+ et en $+\infty$.

b. En déduire que pour tout $x>0$, $\ln x\leqslant x-1$.

c. Étudier la convexité de f.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit $f(x)=(2-\ln x)\ln x$ sur $]0;+\infty[$. On pose $X=\ln x$.

a. Résoudre $f(x)=0$.

b. Montrer que $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x}$ et dresser le tableau de variations.

c. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 14 ⋆⋆⋆

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-8\ln x$.

a. Étudier les variations de f et ses limites.

b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions $\alpha<\beta$.

c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = e^4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. On pose $v_n = \ln u_n$.

a. Justifier que $u_n > 0$ pour tout n, puis démontrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

c. Déterminer la limite de (v_n), puis celle de (u_n).

d. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < 1{,}01$.

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 16 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f sur $]0;+\infty[$.

b. Calculer $f'(x)$ et étudier le sens de variation sur $\left]e^{-1};+\infty\right[$.

c. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter.

Exercice 17 ⋆⋆⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $\ln x = \dfrac{x}{n}$ sur $]0;+\infty[$ et l'on note $g_n(x) = \ln x - \dfrac{x}{n}$.

a. Étudier les variations de g_n et montrer que son maximum vaut $\ln n - 1$.

b. En déduire que pour $n \geqslant 3$, l'équation $g_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

c. Pour $n = 1$ et $n = 2$, combien y a-t-il de solutions ? Justifier.

Exercice 18 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \ln(1 + e^x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $f(x) - x = \ln(1 + e^{-x})$.

c. En déduire que la droite $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$, et préciser la position relative.