Chapitre 9. Cours

Fonctions sinus et cosinus

1. Rappels de Première

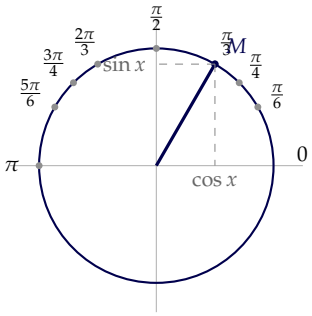


Figure 1 — Le cercle trigonométrique et les valeurs remarquables.

Définition 9.1 — Cercle trigonométrique

À tout réel x correspond un unique point M du cercle de rayon 1, repéré par l'angle x en **radians**. Alors $\cos x$ est l'**abscisse** de M et $\sin x$ son **ordonnée**.

Propriété 9.2 — Valeurs à connaître

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Propriété 9.3 — Identité fondamentale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{pour tout réel } x.$$

Exercice d'application 1

Vérifier l'identité fondamentale en $x = \frac{\pi}{6}$***, puis en*** $x = \frac{\pi}{3}$***.***

Solution. En $\frac{\pi}{6}$: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ ✓.

En $\frac{\pi}{3}$: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓.

Remarque — Astuce mnémotechnique

Les sinus des angles remarquables s'écrivent $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$ pour $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Les cosinus se lisent dans l'autre sens.

2. Parité et périodicité

Théorème 9.4 — Parité et périodicité

Pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x \qquad \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

cos **est paire**, sin **est impaire**, et toutes deux sont 2π**-périodiques**.

Exercice d'application 2

Simplifier $A = \cos(-x) + \cos(x+2\pi)$ ***et*** $B = \sin(-x) + \sin(x+4\pi)$**.**

Solution. $A = \cos x + \cos x = 2\cos x$.
$B = -\sin x + \sin x = 0$, la périodicité s'appliquant deux fois pour $x + 4\pi$.

Remarque — Bon réflexe

Périodicité et parité permettent de ramener toute étude à l'intervalle $[0\,;\pi]$, puis d'obtenir le reste par symétrie. C'est un gain de temps considérable, et un point de rédaction.

3. Absence de limite en l'infini

Attention — À retenir

cos x et sin x **n'ont pas de limite** en $+\infty$ ni en $-\infty$: elles oscillent indéfiniment entre -1 et 1 sans se stabiliser. Écrire « $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ » est une faute.

Remarque — Ce qui reste vrai

Elles sont **bornées** : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. C'est cette propriété, et non une limite, qui permet de conclure par encadrement.

4. Limites usuelles en 0

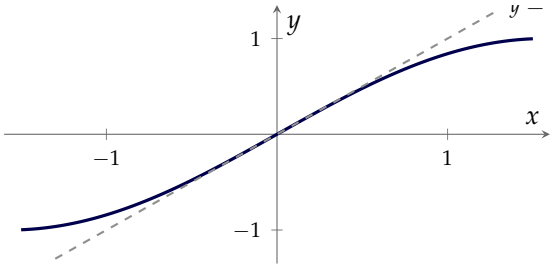


Figure 2 — Près de 0, $\sin x \approx x$: la droite $y = x$ est tangente en 0.

Théorème 9.5 — Limites usuelles en 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Ces deux limites sont les nombres dérivés de sin et de cos en 0.

Exercice d'application 3

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$.

Solution. On fait apparaître le même argument au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{\sin(5x)}{x} = 5 \times \frac{\sin(5x)}{5x} \xrightarrow[x\to 0]{} 5 \times 1 = 5.$$

Remarque — Astuce

Faites toujours apparaître le **même** argument au numérateur et au dénominateur, quitte à multiplier et diviser par le coefficient. Sans cela, la limite de référence ne s'applique pas.

5. Dérivées

Théorème 9.6 — Dérivées

sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et

$$\sin'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\sin x.$$

Pour u dérivable : $\big(\sin u\big)' = u' \cos u \qquad \big(\cos u\big)' = -u' \sin u.$

Exercice d'application 4

Dériver ***a.*** $f(x) = \sin(3x)$ ***b.*** $g(x) = \cos\left(x^2\right)$.

Solution.
a. Avec $u(x) = 3x$: $f'(x) = 3\cos(3x)$.
b. Avec $u(x) = x^2$: $g'(x) = -2x \sin\left(x^2\right)$.

Attention — Erreur à éviter

Le signe moins est sur la dérivée du **cosinus**, pas du sinus. Une dérivation sur deux se perd là.

6. Étude sur une période

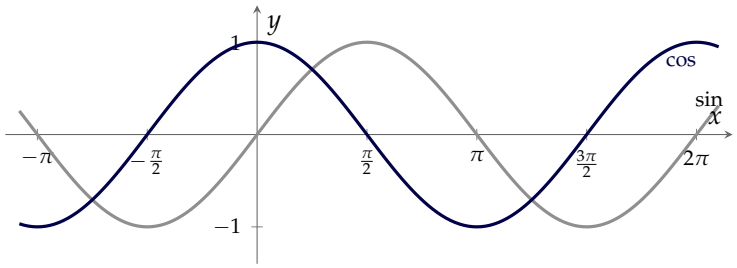


Figure 3 — Les fonctions sinus et cosinus sur une période.

Propriété 9.7 — Variations de référence

Sur $[0\,;\pi]$, cos est strictement décroissante de 1 à -1.
Sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, sin est strictement croissante de -1 à 1.

Exercice d'application 5

Étudier les variations de $f(x)=\cos(2x)$ ***sur*** $[0\,;\pi]$**.**

Solution. $f'(x)=-2\sin(2x)$. Sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $2x\in[0\,;\pi]$ donc $\sin(2x)\geqslant 0$ et $f'(x)\leqslant 0$; sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $2x\in[\pi\,;2\pi]$ donc $f'(x)\geqslant 0$.
f décroît de $f(0)=1$ à $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$, puis croît de -1 à $f(\pi)=1$ — cohérent avec sa période π.

Remarque — Étude d'une fonction trigonométrique

1. Déterminer une période, et réduire l'intervalle d'étude.
2. Chercher une parité pour le réduire encore.
3. Dériver et résoudre $f'(x)=0$ **sur l'intervalle réduit**.
4. Dresser le tableau, puis compléter par symétrie et périodicité.

7. Convexité

Propriété 9.8 — Concavité et inflexions

$\sin''(x)=-\sin x$: la fonction sin est **concave sur** $[0\,;\pi]$ **et convexe sur** $[\pi\,;2\pi]$. Les points d'abscisses 0, π, 2π sont des points d'inflexion.

Exercice d'application 6

Justifier que la courbe de sin ***admet un point d'inflexion en*** $x=\pi$**.**

Solution. $\sin''(x)=-\sin x$ s'annule en π et **change de signe** : négative sur $]0\,;\pi[$ (concavité), positive sur $]\pi\,;2\pi[$ (convexité). Le point $(\pi\,;0)$ est donc un point d'inflexion.

Remarque — Astuce

La dérivée seconde de sin est $-\sin$: le signe de la concavité se lit directement sur la courbe elle-même, sans nouveau calcul.

8. Équations trigonométriques

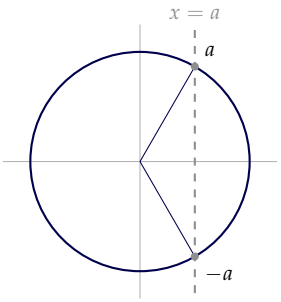


Figure 4 — Résoudre $\cos x = a$ *: deux familles de solutions.*

Théorème 9.9 — Équations trigonométriques

Pour a réel :

$$\cos x = \cos a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin a \iff x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice d'application 7

Résoudre $\cos x = \dfrac{1}{2}$ ***sur*** $[0\,;2\pi]$**.**

Solution. Comme $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$, les solutions réelles sont $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$.
Dans $[0\,;2\pi]$, la première famille donne $\dfrac{\pi}{3}$ $(k=0)$ et la seconde $2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$ $(k=1)$:

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} \,;\, \frac{5\pi}{3} \right\}.$$

Attention — Erreur à éviter

Ne donner qu'**une** solution. Chaque équation en fournit deux familles ; sur un intervalle borné, il faut ensuite **sélectionner** les valeurs de k qui conviennent, et les lister toutes.

Remarque — Bon réflexe

Le cercle trigonométrique tranche instantanément : placez la valeur cherchée en abscisse pour un cosinus, en ordonnée pour un sinus, et lisez les points d'intersection. Deux en général, un seul aux extrémités.

Méthodes

Méthode 1 — Résoudre une équation trigonométrique sur un intervalle

1. Ramener l'équation à la forme $\cos x = \cos a$ ou $\sin x = \sin a$, en identifiant a parmi les angles remarquables.
2. Écrire les **deux** familles de solutions avec le paramètre $k \in \mathbb{Z}$.
3. Sélectionner les valeurs de k donnant une solution dans l'intervalle demandé.
4. Lister les solutions et les placer sur le cercle pour vérifier.

Exemple éclair. $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$: $a = \dfrac{\pi}{4}$, d'où $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$.
Erreur à éviter. Oublier la seconde famille. Pour un sinus c'est $\pi - a$, pour un cosinus c'est $-a$: les deux ne se ressemblent pas, ne les confondez pas.

Méthode 2 — Dériver $\sin u$ et $\cos u$

1. Identifier la fonction intérieure u et calculer u'.
2. Appliquer $\big(\sin u\big)' = u' \cos u$ ou $\big(\cos u\big)' = -u' \sin u$.
3. Ne pas oublier le facteur u', ni le signe moins pour le cosinus.
4. Simplifier si un facteur commun apparaît.

Exemple éclair. Pour $\sin(\omega x)$, la dérivée est $\omega \cos(\omega x)$: la pulsation **sort** en facteur.
Bon réflexe. C'est ce facteur ω qui explique que les oscillations rapides aient de grandes pentes.

Méthode 3 — Étudier une fonction trigonométrique

1. Déterminer une période T et se ramener à un intervalle de longueur T.
2. Chercher une parité pour diviser encore l'intervalle par deux.
3. Dériver, résoudre $f'(x) = 0$ sur l'intervalle réduit.
4. Dresser le tableau, calculer les valeurs remarquables.
5. Étendre par symétrie puis par périodicité, en le **disant**.

Exemple éclair. $f(x) = \cos(2x)$: période π, paire — l'étude se fait sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ seulement.
Astuce. Justifier la réduction de l'intervalle vaut autant de points que l'étude elle-même. Écrivez explicitement : « f étant 2π-périodique et paire, on l'étudie sur $[0\,;\pi]$ ».

Méthode 4 — Utiliser $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

1. Repérer la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
2. Faire apparaître le **même** argument au numérateur et au dénominateur.
3. Multiplier et diviser par le coefficient manquant.
4. Appliquer la limite de référence et conclure par produit.

Exemple éclair. $\dfrac{\sin(3x)}{5x} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{\sin(3x)}{3x} \longrightarrow \dfrac{3}{5}$.
Erreur à éviter. Appliquer la limite de référence à $\dfrac{\sin(3x)}{x}$ sans réécriture : l'argument du sinus et le dénominateur doivent coïncider.

Méthode 5 — Conclure par le caractère borné

Quand ? Une expression contient sin ou cos dont l'argument tend vers l'infini : aucune limite n'existe pour ce facteur, mais l'ensemble peut converger.

1. Encadrer le facteur trigonométrique : $-1 \leqslant \sin(\dots) \leqslant 1$.
2. Multiplier l'encadrement par le facteur restant, en **surveillant son signe**.
3. Vérifier que les deux bornes ont la même limite.
4. Conclure par le théorème des gendarmes.

Exemple éclair. $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$, donc $\dfrac{\sin x}{x} \to 0$ en $+\infty$ — à ne pas confondre avec la limite en 0, qui vaut 1.
Erreur à éviter. Multiplier un encadrement par une quantité **négative** sans inverser les inégalités. Si le facteur change de signe, traitez les deux cas séparément.

Méthode 6 — Résoudre une inéquation trigonométrique

Quand ? L'énoncé demande le signe d'une expression, ou les intervalles où une courbe est au-dessus d'une droite.
1. Résoudre d'abord l'**équation** associée : elle donne les bornes.
2. Placer ces bornes sur le cercle trigonométrique.
3. Lire directement sur le cercle l'arc où l'inégalité est satisfaite.
4. Traduire cet arc en intervalle, puis en réunion d'intervalles sur l'intervalle demandé.

Exemple éclair. $\cos x \geqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$: les points d'abscisse au moins $\dfrac{1}{2}$ forment l'arc allant de 0 à $\dfrac{\pi}{3}$ et de $\dfrac{5\pi}{3}$ à 2π.
Astuce. Un tableau de signes est inutile ici : le cercle donne la réponse en une lecture.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Erreur	Bon réflexe
Écrire $(\cos x)' = \sin x$	Le signe est $-$: en 0 le cosinus est maximal et décroît ensuite
Ne donner qu'une famille de solutions	Le théorème 9.9 en fournit deux
Chercher $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$	Elle n'existe pas — utiliser le caractère borné
Écrire $\sin(a+b) = \sin a + \sin b$	Faux ; il existe une formule d'addition, à ne pas confondre
Résoudre en degrés	Les fonctions du programme travaillent en **radians**
Oublier u' dans $\big(\sin u\big)'$	Même vigilance qu'aux chapitres 5, 11 et 12

Module Python — périodicité et approximation des petits angles

```
# Periodicite et approximation des petits angles
from math import sin, pi
print("Periodicite :  sin(x) et sin(x + 2*pi)")
liste_x = [0.5, 1, 2, 3]
for i in range(len(liste_x)):
   x = liste_x[i]
   print("x =", x, " sin(x) =", round(sin(x), 10))
   print(" sin(x + 2pi) =", round(sin(x + 2 * pi), 10))
print()
print("Approximation des petits angles :  sin(x) proche de x")
liste_x = [1, 0.5, 0.1]
for i in range(len(liste_x)):
   x = liste_x[i]
   ecart = abs(x - sin(x))
   print("x =", x, " sin(x) =", round(sin(x), 10))
   rapport = sin(x) / x
   print(" ecart =", round(ecart, 10), " sin(x)/x =", round(rapport,
10))
```

Trace d'exécution.

```
Periodicite :  sin(x) et sin(x + 2*pi)
x = 0.5 sin(x) = 0.4794255386
sin(x + 2pi) = 0.4794255386
x = 1 sin(x) = 0.8414709848
sin(x + 2pi) = 0.8414709848
x = 2 sin(x) = 0.9092974268
sin(x + 2pi) = 0.9092974268
x = 3 sin(x) = 0.1411200081
sin(x + 2pi) = 0.1411200081
Approximation des petits angles :  sin(x) proche de x
x = 1 sin(x) = 0.8414709848
ecart = 0.1585290152 sin(x)/x = 0.8414709848
x = 0.5 sin(x) = 0.4794255386
ecart = 0.0205744614 sin(x)/x = 0.9588510772
x = 0.1 sin(x) = 0.0998334166
ecart = 0.0001665834 sin(x)/x = 0.9983341665
```

Interprétation mathématique. La première trace vérifie le théorème 9.4 sur quatre valeurs : les deux colonnes coïncident sur les dix décimales affichées.
La seconde illustre le théorème 9.5 : la colonne des rapports monte vers 1, de 0,8415 à 0,9983 lorsque x passe de 1 à 0,1. Mieux, l'écart $|x - \sin x|$ tombe de 0,1585 à 0,000167 sur ce même passage, soit une division par près de mille quand x est divisé par dix — comportement en x^3, cohérent avec le fait que $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$ près de 0.

Attention

Les deux colonnes de la première trace coïncident à dix décimales, mais **pas bit à bit** : pour $x = 0{,}5$, la machine donne un écart de $-2{,}2 \times 10^{-16}$ entre $\sin(x + 2\pi)$ et $\sin(x)$, car 2π n'est pas représentable exactement en flottant. **Le calcul numérique n'est pas exact ;** il illustre, il ne démontre pas.