Chapitre 9. Fiche d'exercices n°1

Fonctions sinus et cosinus

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Donner les valeurs exactes.

a. $\cos\dfrac{\pi}{3}$ c. $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ e. $\cos(-\pi)$

b. $\sin\dfrac{\pi}{4}$ d. $\sin\dfrac{5\pi}{6}$ f. $\sin\dfrac{3\pi}{2}$

Exercice 2 ⋆

Simplifier : a. $\cos(x+2\pi)$ b. $\sin(-x)$ c. $\cos(\pi-x)$ d. $\sin(\pi+x)$.

Exercice 3 ⋆

Calculer la dérivée de : a. $f(x)=\sin(3x)$ b. $g(x)=\cos(2x-1)$ c. $h(x)=x\sin x$ d. $k(x)=\cos^2 x$.

Exercice 4 ⋆

Sachant que $\cos x=\dfrac{1}{3}$ et $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, calculer $\sin x$.

Exercice 5 ⋆

Résoudre sur $[0;2\pi]$: a. $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b. $\sin x=-\dfrac{1}{2}$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 6 ⋆⋆

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a. $\sin(2x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ c. $2\sin^2 x-1=0$.

Exercice 7 ⋆⋆

Soit $f(x)=\cos x+\dfrac{x}{2}$ sur $[0;2\pi]$.

a. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0;2\pi]$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 8 ⋆⋆

Soit $g(x) = \sin x - x$ sur $\mathbb{R}$.

a. Étudier le sens de variation de g.

b. En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $\sin x \leqslant x$.

Exercice 9 ⋆⋆

Déterminer les limites suivantes. a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x - 2}{x^2}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sin x)$ d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

Exercice 10 ⋆⋆

Soit $f(x) = \sin x + \cos x$.

a. Montrer que f est 2π-périodique.

b. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0; 2\pi]$.

c. En déduire le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 ⋆⋆

Soit $h(x) = \cos(2x) + 2\cos x$ sur $[0; \pi]$.

a. Montrer que $h'(x) = -2\sin x\,(2\cos x + 1)$.

b. Dresser le tableau de variations de h sur $[0; \pi]$.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ sur $[0; 2\pi]$.

a. Montrer que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.

b. Résoudre $\cos x = \sin x$ sur $[0; 2\pi]$ et en déduire le tableau de signes de f'.

c. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 2\pi]$.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

La hauteur d'eau (en mètres) dans un port est modélisée par $h(t) = 5 + 2\sin\left(\dfrac{\pi t}{6}\right)$, où t est le temps en heures, $t \in [0; 24]$.

a. Quelle est la période de h ? Interpréter.

b. Déterminer la hauteur maximale et les instants où elle est atteinte.

c. Résoudre $h(t) = 6$ sur $[0; 12]$ et interpréter.

Exercice 14 ⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \sin\left(x^2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

a. Justifier que f est paire.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Résoudre $f(x) = 0$ sur $[0; 3]$.

Exercice 15 ⋆⋆⋆

Soit $f(x) = 2\cos^2 x - \cos x - 1$.

a. En posant $X = \cos x$, résoudre $f(x) = 0$ sur $[0; 2\pi]$.

b. Montrer que $f'(x) = \sin x\,(1 - 4\cos x)$.

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 16 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

a. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Montrer que la courbe de f est comprise entre celles de $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exercice 17 ⋆⋆⋆⋆

Soit $f(x) = x - \sin x$ sur $[0; +\infty[$.

a. Étudier les variations de f et en déduire son signe.

b. Étudier la convexité de f sur $[0; \pi]$ et préciser le point d'inflexion.

Exercice 18 ⋆⋆⋆⋆

Soit (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$ et $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a. Démontrer que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ et en déduire $\lim u_n$.

b. Écrire un script Python calculant S_n pour un entier n donné.