Chapitre 10. Cours

Orthogonalité, produit scalaire et distances dans l'espace

1. Produit scalaire

Un seul nombre encode à la fois une longueur et un angle. C'est tout l'intérêt du produit scalaire : il transforme la géométrie en calcul.

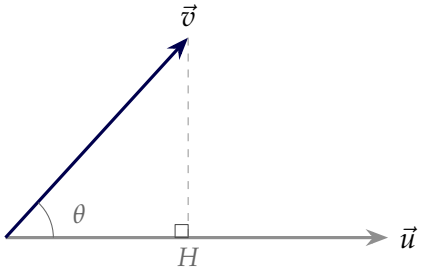


Figure 1 — Produit scalaire et projection : l'angle θ est l'angle $\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}$.

Définition 10.1 — Produit scalaire

Pour deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\widehat{(\vec{u}\,;\vec{v})}.$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire vaut 0.

Théorème 10.2 — Expression analytique

Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u}(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}(x'\,;y'\,;z')$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Exercice d'application 1

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ***pour*** $\vec{u}(1\,;2\,;-2)$ ***et*** $\vec{v}(3\,;0\,;1)$**.**

Solution. Dans un repère orthonormé :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 3 + 2\times 0 + (-2)\times 1 = 3 + 0 - 2 = 1.$$

Propriété 10.3 — Norme et distance

Dans un repère orthonormé :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \text{et} \qquad AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

Exercice d'application 2

a. Calculer $\|\vec{u}\|$ ***pour*** $\vec{u}(1\,;2\,;-2)$. ***b. Calculer*** AB ***pour*** $A(1\,;0\,;2)$ ***et*** $B(3\,;-2\,;3)$.

Solution.
a. $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$.
b. $\overrightarrow{AB}\,(2\,;-2\,;1)$, donc $AB = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$.

Attention — Erreur à éviter

L'expression analytique **exige un repère orthonormé**. Dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ d'un cube d'arête 1, c'est vrai ; dans celui d'un pavé ou d'un tétraèdre quelconque, c'est faux.

2. Propriétés de calcul

Théorème 10.4 — Règles de calcul

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \qquad (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\,(\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

Exercice d'application 3

Vérifier la deuxième règle sur $\vec{u}(1\,;2\,;0)$, $\vec{v}(0\,;1\,;1)$ ***et*** $\vec{w}(2\,;0\,;1)$.

Solution. D'une part $\vec{v}+\vec{w}\,(2\,;1\,;2)$, donc $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = 2+2+0 = 4$.
D'autre part $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2$ et $\vec{u}\cdot\vec{w} = 2$, de somme 4 : les deux calculs coïncident.

Propriété 10.5 — Identité à connaître

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

Exercice d'application 4

On sait que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ ***et*** $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 4$. ***Calculer*** $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Solution. L'identité donne $16 = 4 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + 9$, d'où

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{16-4-9}{2} = \frac{3}{2}.$$

Remarque — Astuce

Le produit scalaire se calcule comme un produit ordinaire : on développe. C'est ce qui permet de traiter $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en décomposant sur la base, sans jamais chercher d'angle.

3. Orthogonalité

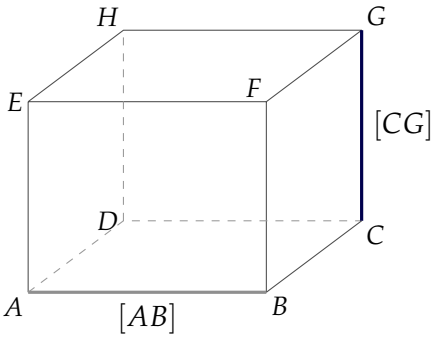


Figure 2 — Dans le cube, $[AB]$ et $[CG]$ sont orthogonales sans être sécantes.

Définition 10.6 — Vecteurs orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Propriété 10.7 — Droites orthogonales

Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonales** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercice d'application 5

Les droites de vecteurs directeurs $\vec{u}(2\,;1\,;-3)$ ***et*** $\vec{v}(1\,;1\,;1)$ ***sont-elles orthogonales ?***

Solution. On calcule le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 1 - 3 = 0.$$

Il est nul : les droites sont orthogonales.

Remarque — Bon réflexe

Orthogonales n'est pas **perpendiculaires**. Dans l'espace, deux droites peuvent être orthogonales sans se couper — $[AB]$ et $[CG]$ dans le cube de la figure 2. Perpendiculaires suppose en plus qu'elles soient sécantes.

4. Vecteur normal à un plan

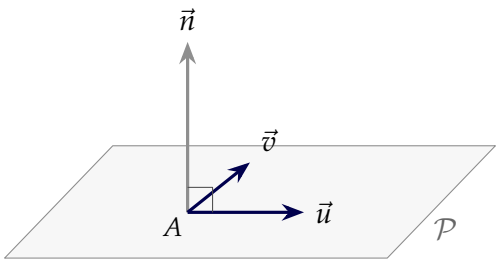


Figure 3 — Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ — donc à tous les vecteurs du plan.

Définition 10.8 — Vecteur normal

Un vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ est **normal** au plan $\mathcal{P}$ lorsqu'il est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Théorème 10.9 — Le vecteur normal voit tout le plan

Si $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$, alors $\vec{n}$ est orthogonal à **tout** vecteur de la direction de $\mathcal{P}$.

Théorème 10.10 — Déterminer un plan

Un plan est entièrement déterminé par **un point** et **un vecteur normal**.

Exercice d'application 6

Vérifier que $\vec{n}(1\,;-1\,;1)$ ***est normal au plan dirigé par*** $\vec{u}(1\,;1\,;0)$ ***et*** $\vec{v}(0\,;1\,;1)$**.**

Solution. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et :

$$\vec{n}\cdot\vec{u} = 1-1+0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n}\cdot\vec{v} = 0-1+1 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires : il est normal au plan.

5. Équation cartésienne d'un plan

Théorème 10.11 — Équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, le plan passant par $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ a pour équation

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0,$$

soit $ax+by+cz+d=0$ avec $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$.

Exercice d'application 7

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1\,;2\,;-1)$ ***et de vecteur normal*** $\vec{n}(3\,;-1\,;2)$**.**

Solution. L'équation est de la forme $3x-y+2z+d=0$. Le point A y appartient :

$$3-2-2+d=0 \iff d=1.$$

Donc $\mathcal{P}$: $3x-y+2z+1=0$.

Propriété 10.12 — Réciproque

Toute équation $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$ est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$.

Exercice d'application 8

Donner un vecteur normal du plan $2x-4y+6z-2=0$***, puis simplifier cette équation.***

Solution. Les coefficients donnent directement $\vec{n}(2\,;-4\,;6)$.
En divisant par 2 : $x-2y+3z-1=0$ — même plan, vecteur normal $(1\,;-2\,;3)$ colinéaire au premier.

Remarque — Le gain est considérable

Une représentation paramétrique de plan compte trois lignes et deux paramètres ; l'équation cartésienne tient en une ligne sans paramètre, **et les coefficients donnent directement le vecteur normal**. Passez à la cartésienne dès que c'est possible.

6. Positions relatives par les normales

Propriété 10.13 — Lire la position sur les normales

$$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \iff \vec{n}_1 \text{ et } \vec{n}_2 \text{ colinéaires} \qquad \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$
$$d \parallel \mathcal{P} \iff \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \qquad d \perp \mathcal{P} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires.}$$

Exercice d'application 9

Étudier la position relative des plans $\mathcal{P}_1 : x + 2y - z + 1 = 0$ ***et*** $\mathcal{P}_2 : 2x + 4y - 2z - 5 = 0$.

Solution. $\vec{n}_1(1\,;2\,;-1)$ et $\vec{n}_2(2\,;4\,;-2) = 2\,\vec{n}_1$ sont colinéaires : les plans sont parallèles. Sont-ils confondus ? Le point $A(0\,;0\,;1)$ appartient à $\mathcal{P}_1$, mais $2\times 0+4\times 0-2\times 1-5=-7\neq 0$: les plans sont **strictement parallèles**.

Attention — Erreur à éviter

Les deux dernières lignes de la propriété 10.13 se croisent : pour une **droite** et un **plan**, le produit scalaire nul signifie **parallèle**, pas perpendiculaire. Écrire l'inverse est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Remarque — Bon réflexe

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donne le parallélisme, mais pas l'**inclusion**. Testez ensuite **un point** de la droite dans l'équation du plan : s'il la vérifie, la droite est incluse.

7. Projeté orthogonal et distance

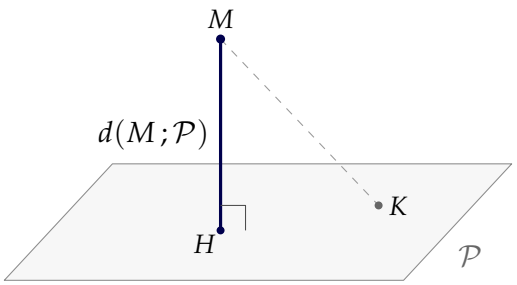


Figure 4 — Le projeté orthogonal H réalise la plus courte distance : $MH \leqslant MK$ pour tout K de $\mathcal{P}$.

Définition 10.14 — Projeté orthogonal et distance

Le **projeté orthogonal** de M sur $\mathcal{P}$ est le point H de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MH}$ soit normal à $\mathcal{P}$. La **distance** de M à $\mathcal{P}$ est MH, et c'est la plus courte distance de M à un point du plan.

Théorème 10.15 — Distance point-plan

Si $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormé, alors

$$d(M\,;\mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Formule non exigible au bac : savoir retrouver la distance par le projeté orthogonal.

Exercice d'application 10

Calculer la distance de $M(1\,;1\,;1)$ ***au plan*** $x + y + z - 1 = 0$**.**

Solution. On applique la formule :

$$d = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155.$$

Remarque — Astuce

La valeur absolue au numérateur n'est pas décorative : elle rend la distance positive quel que soit le côté du plan où se trouve M. Son signe, lui, indique de quel côté — une information parfois demandée.

Attention — Erreur à éviter

Oublier de normaliser, c'est-à-dire diviser par $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Sans cette division, le résultat dépend du choix arbitraire du vecteur normal.

Méthodes

Méthode 1 — Déterminer une équation cartésienne de plan

Quand ? Un plan est donné par un point et un vecteur normal, ou par trois points.

1. Obtenir un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ — donné, ou calculé par la méthode 2.
2. Écrire $ax + by + cz + d = 0$.
3. Déterminer d en substituant les coordonnées d'un point du plan.
4. Vérifier avec un **second** point.

Exemple éclair. $A(1\,;2\,;-1)$, $\vec{n}(3\,;-1\,;2)$: $3x - y + 2z + d = 0$ avec $3 - 2 - 2 + d = 0$, donc $d = 1$ et $\mathcal{P} : 3x - y + 2z + 1 = 0$.

Astuce. Multiplier l'équation par un réel non nul ne change pas le plan. Simplifiez : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ vaut mieux que $12x + 6y + 4z - 12 = 0$.

Méthode 2 — Trouver un vecteur normal à partir de trois points

Quand ? Le plan est donné par A, B, C non alignés.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Poser $\vec{n}(a\,;b\,;c)$ et écrire $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
3. Résoudre le système : deux équations, trois inconnues — il reste un degré de liberté.
4. Choisir une valeur simple pour l'inconnue libre, en évitant les fractions.

Exemple éclair. $A(0;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(0;1;1)$: le système $a+b=0$, $b+c=0$ donne, avec $b=-1$: $\vec{n}(1;-1;1)$.
Bon réflexe. Le système est **normal** d'avoir une infinité de solutions : tous les vecteurs normaux d'un plan sont colinéaires. Choisissez le plus simple, puis **vérifiez** les deux produits scalaires.

Méthode 3 — Intersection droite-plan par l'équation cartésienne

Quand ? Le plan a une équation cartésienne : la méthode devient une simple substitution.
1. Écrire la droite sous forme paramétrique.
2. Substituer x, y, z dans l'équation du plan : on obtient **une** équation en t.
3. Résoudre. Une solution → sécants. Aucune → parallèle stricte. Une identité → droite incluse.
4. Reporter t dans la droite pour obtenir le point.

Exemple éclair. d : $(1+t\,;2-t\,;t)$ et $\mathcal{P}$: $x+y+2z-3=0$ donnent $(1+t)+(2-t)+2t-3=0$, soit $2t=0$ et $t=0$: le point d'intersection est $(1\,;2\,;0)$.
Le gain. Par la représentation paramétrique du plan, ce calcul demandait trois équations et trois inconnues. Par l'équation cartésienne, une seule équation à une inconnue. Convertissez systématiquement.

Méthode 4 — Déterminer un projeté orthogonal

Quand ? Projeté d'un point sur un plan, ou sur une droite. Deux situations, une même idée : suivre la perpendiculaire.
1. **Sur un plan :** écrire la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{n}$, normal au plan ; substituer dans l'équation du plan et résoudre en t ; reporter : on obtient H.
2. **Sur une droite :** écrire H comme point courant de la droite, en fonction de t ; traduire $\overrightarrow{MH}\cdot\vec{u}=0$: une équation en t ; résoudre et reporter.

Exemple éclair. $M(1;1;1)$ sur $\mathcal{P}$: $x+y+z-1=0$: la droite $(1+t\,;1+t\,;1+t)$ donne $3t+2=0$, donc $t=-\frac{2}{3}$ et $H\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.
Erreur à éviter. Confondre les deux cas. Sur un plan on suit le vecteur **normal** ; sur une droite on impose l'orthogonalité au vecteur **directeur**. Prendre le mauvais vecteur donne un point qui n'a aucun sens.

Méthode 5 — Calculer une distance

1. **Point-plan :** appliquer directement $d(M\,;\mathcal{P})=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
2. **Point-droite :** déterminer le projeté H (méthode 4), puis calculer MH.
3. **Entre deux plans parallèles :** prendre un point de l'un, appliquer la formule avec l'autre.

Exemple éclair. $M(1;1;1)$ et $\mathcal{P}$: $x+y+z-1=0$: $d=\dfrac{|1+1+1-1|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Astuce. Pour une distance point-plan, le projeté n'est **pas** nécessaire : la formule suffit. Ne le calculez que si l'énoncé demande ses coordonnées.

Méthode 6 — Démontrer une orthogonalité dans un solide

Quand ? « Démontrer que (AF) et (BE) sont perpendiculaires », « que (AG) est orthogonale au plan (BDE) ».
1. Choisir un repère **orthonormé** adapté au solide — pour un cube d'arête 1, $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

2. Lire les coordonnées des sommets : elles valent 0 ou 1.
3. Calculer le ou les produits scalaires.
4. Pour une droite orthogonale à un plan, vérifier l'orthogonalité avec **deux** vecteurs directeurs non colinéaires du plan.
5. Conclure en distinguant **orthogonal** et **perpendiculaire**.

Exemple éclair. Cube d'arête 1 : $\overrightarrow{AG}\,(1\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{BD}\,(-1\,;1\,;0)$ donnent $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=-1+1+0=0$: (AG) et (BD) sont orthogonales.

Erreur à éviter. Employer l'expression analytique dans un repère qui n'est pas orthonormé — un pavé non cubique, un tétraèdre quelconque. Justifiez toujours le caractère orthonormé du repère avant de calculer.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Erreur	Bon réflexe
Utiliser $xx'+yy'+zz'$ en repère non orthonormé	La formule exige l'orthonormalité
Oublier la valeur absolue dans la distance	Une distance est positive
Oublier d dans le numérateur de la formule	L'équation doit être écrite sous la forme $=0$
Confondre orthogonales et perpendiculaires	Perpendiculaires $=$ orthogonales **et** sécantes
Croire le vecteur normal unique	Il est défini à un facteur non nul près
Chercher deux vecteurs directeurs quand la normale suffit	Un point et une normale déterminent le plan

Module Python — distance et projeté orthogonal

```
# Distance, projete orthogonal et angle
from math import sqrt
def produit_scalaire(u, v):
  return u[0] * v[0] + u[1] * v[1] + u[2] * v[2]
def norme(u):
  return sqrt(produit_scalaire(u, u))
def distance_point_plan(M, a, b, c, d):
  # plan d'equation a*x + b*y + c*z + d = 0
  numerateur = abs(a * M[0] + b * M[1] + c * M[2] + d)
  return numerateur / sqrt(a * a + b * b + c * c)
def projete_sur_plan(M, a, b, c, d):
  k = (a * M[0] + b * M[1] + c * M[2] + d) / (a * a + b * b + c * c)
  return [M[0] - k * a, M[1] - k * b, M[2] - k * c]
M = [1, 1, 1]
a, b, c, d = 1, 2, 3, -1
print("Plan P : x + 2y + 3z - 1 = 0 et M(1 ; 1 ; 1)")
distance = distance_point_plan(M, a, b, c, d)
print("distance de M au plan :", round(distance, 6))
H = projete_sur_plan(M, a, b, c, d)
print("projete H :", round(H[0], 6), ";", round(H[1], 6), ";",
round(H[2], 6))
MH = [H[0] - M[0], H[1] - M[1], H[2] - M[2]]
print("verification :  norme de MH =", round(norme(MH), 6))
test = a * H[0] + b * H[1] + c * H[2] + d
print("verification :  H est dans le plan :", round(test, 10) == 0)
```

Trace d'exécution.

```
Plan P : x + 2y + 3z - 1 = 0 et M(1 ; 1 ; 1)
distance de M au plan :  1.336306
projete H : 0.642857 ; 0.285714 ; -0.071429
verification :  norme de MH = 1.336306
verification :  H est dans le plan :  True
```

Interprétation mathématique. La distance calculée par la formule du théorème 10.15 et la longueur MH obtenue par le projeté **coïncident exactement** : $1{,}336306 \approx \dfrac{5}{\sqrt{14}}$. C'est la confirmation numérique de la définition 10.14 — le projeté orthogonal réalise la distance minimale.

Les coordonnées de H valent exactement $\left(\dfrac{9}{14}\,;\dfrac{2}{7}\,;-\dfrac{1}{14}\right)$, car le coefficient k calculé par la fonction vaut $\dfrac{5}{14}$. La dernière ligne répond *True* : H appartient bien au plan, à la précision machine.

Le vecteur $\overrightarrow{MH}$ vaut $-\dfrac{5}{14}\,(1\,;2\,;3)$, c'est-à-dire un multiple du vecteur normal $\vec{n}(1\,;2\,;3)$ lu sur l'équation du plan : c'est exactement ce que signifie « projeté orthogonal ». Sa norme, $\dfrac{5}{14}\sqrt{14} = \dfrac{5}{\sqrt{14}}$, redonne la distance de la première ligne.

Attention

L'écriture `abs(...)` de la fonction distance n'est pas un détail de programmation : **sans elle, on obtiendrait un nombre négatif** dès que le point est du côté où $ax + by + cz + d < 0$.