Chapitre 10. Fiche d'exercices n°1

Produit scalaire, orthogonalité et distances dans l'espace

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ pour : a. $\vec{u}\,(1;2;-2)$, $\vec{v}\,(3;0;1)$ b. $\vec{u}\,(2;-1;3)$, $\vec{v}\,(1;5;1)$. Ces vecteurs sont-ils orthogonaux ?

Exercice 2 ⋆

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. a. $A(2;5;6)$, $\vec{n}\,(2;-1;2)$ b. $A(1;-2;3)$, $\vec{n}\,(2;-1;2)$ c. $A(2;-4;5)$, $\vec{n}\,(5;6;0)$.

Exercice 3 ⋆

Les plans $\mathcal{P}_1 : x+y+z+3=0$, $\mathcal{P}_2 : 2x-y+5=0$ et $\mathcal{P}_3 : x-2y+z-3=0$ sont-ils perpendiculaires deux à deux ? Étudier les trois couples.

Exercice 4 ⋆

Calculer la distance du point $M(1;-2;3)$ au plan d'équation $2x-y+2z-7=0$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 5 ⋆⋆

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1;2;-3)$ et dirigé par $\vec{u}\,(4;2;-2)$ et $\vec{v}\,(0;4;2)$. On commencera par chercher un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Exercice 6 ⋆⋆

Déterminer une équation de la forme $ax+by+cz=1$ du plan passant par $A(1;0;1)$, $B(2;-1;0)$ et $C(3;-2;0)$.

Exercice 7 ⋆⋆

Soit $A(2;1;-3)$ et $B(4;-1;-3)$. Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$, c'est-à-dire le plan passant par le milieu de $[AB]$ et orthogonal à (AB).

Exercice 8 ⋆⋆

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1;2;-1)$ de vecteur directeur $\vec{u}\,(1;-1;2)$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$ dans chaque cas. a. $\mathcal{P} : x+y+2z=8$ b. $\mathcal{P} : 2x-z=4$ c. $\mathcal{P} : 2x-z=3$.

Exercice 9 ⋆⋆

Justifier qu'une équation de la sphère de centre $\Omega(1;2;3)$ et de rayon 7 est $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=35$.

Exercice 10 ⋆⋆

Les plans $\mathcal{P}_1 : x+y-2z=6$ et $\mathcal{P}_2 : x-y+z=12$ sont-ils sécants ? Si oui, caractériser leur droite d'intersection par un point et un vecteur directeur.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Dans un repère orthonormé, on considère le plan $\mathcal{P}_1 : 2x+y-z+2=0$ et le plan $\mathcal{P}_2$ passant par $B(1;1;2)$ de vecteur normal $\vec{n}_2\,(1;-1;1)$.

a. Donner un vecteur normal $\vec{n}_1$ de $\mathcal{P}_1$ et montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

b. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_2$.

c. Montrer que la droite Δ de représentation $x=0$, $y=-2+t$, $z=t$ est l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

d. Soit $A(1;1;1)$. Montrer que $AM_t=\sqrt{2t^2-8t+11}$ pour $M_t(0;-2+t;t)$, puis que la distance de A à Δ vaut $\sqrt{3}$.

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Dans un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 muni du repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, soit I le milieu de $[EF]$ et J le milieu de $[AE]$.

a. Donner les coordonnées de I, J et G.

b. Déterminer un vecteur normal au plan (IJG), puis une équation cartésienne de ce plan.

c. Calculer la distance du point H à ce plan.

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit $A(1;1;1)$ et le plan $\mathcal{P} : 2x+y-z+2=0$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$ passant par A.

b. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.

c. Retrouver la distance de A à $\mathcal{P}$ par la formule du cours.

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 14 ⋆⋆⋆⋆

Soit d_1 la droite passant par $H(2;3;0)$ de vecteur directeur $\vec{u}\,(1;-1;1)$ et d_2 de représentation $x=2k-3$, $y=k$, $z=5$. On a montré (chapitre 6) que ces droites sont non coplanaires. Soit $\vec{w}\,(-1;2;3)$.

a. Vérifier que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}\,(2;1;0)$.

b. On admet que le plan P passant par H dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{w}$ a pour équation $5x+4y-z-22=0$. Démontrer que $P\cap d_2=\{M(3;3;5)\}$.

c. Soit Δ la droite passant par M de vecteur directeur $\vec{w}$. Justifier que Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées, puis expliquer pourquoi Δ est la perpendiculaire commune à d_1 et d_2.

Exercice 15 ⋆⋆⋆⋆

Dans un repère orthonormé, soit $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$ et $S(0;0;3)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCS).

b. Calculer la distance de A au plan (BCS).

c. Calculer le volume du tétraèdre $ABCS$ de deux façons et en déduire l'aire du triangle BCS.

Exercice 16 ⋆⋆⋆⋆

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

a. Démontrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

b. En déduire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ (théorème de Pythagore).