Chapitre 11. Cours

Primitives et équations différentielles

1. Notion de primitive

Dériver, vous savez faire. Ce chapitre pose la question inverse : retrouver une fonction dont on connaît la dérivée. C'est la clé du calcul intégral du chapitre suivant — et des équations différentielles, qui font des fonctions les inconnues d'une équation.

Définition 11.1 — Primitive

F est une **primitive** de f sur un intervalle I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.

Théorème 11.2 — Existence

Toute fonction **continue** sur un intervalle I y admet des primitives.

Théorème 11.3 — Unicité à une constante près

Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Il existe une **unique** primitive prenant une valeur donnée en un point donné.

Exercice d'application 1

Déterminer la primitive de $f(x) = 2x$ ***sur*** $\mathbb{R}$ ***qui vérifie*** $F(1) = 5$**.**

Solution. Les primitives de f sont les fonctions $F(x) = x^2 + C$. La condition donne

$$1 + C = 5 \iff C = 4,$$

d'où l'unique primitive cherchée : $F(x) = x^2 + 4$.

Remarque — Bon réflexe

Une primitive se vérifie **toujours** en dérivant. C'est la seule opération du programme dont le contrôle est immédiat et gratuit : ne vous en privez jamais.

2. Primitives des fonctions usuelles

Propriété 11.4 — Primitives usuelles

Sur tout intervalle où f est définie :

$f(x)=k$	$F(x)=kx$	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert$
$f(x)=x^n,\ n\neq -1$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}$	$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$

Exercice d'application 2

Déterminer les primitives de $f(x)=x^2+\mathrm{e}^x-\sin x$ ***sur*** $\mathbb{R}$.

Solution. Terme à terme, avec le tableau :

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+\mathrm{e}^x+\cos x+C,\qquad C\in\mathbb{R}.$$

Contrôle en dérivant : $F'(x)=x^2+\mathrm{e}^x-\sin x=f(x)$ ✓.

Attention — Erreur à éviter

La primitive de sin est $-\cos$, avec le signe moins. C'est l'inverse de la dérivation, et c'est le signe le plus souvent perdu du chapitre.

3. Primitives de formes composées

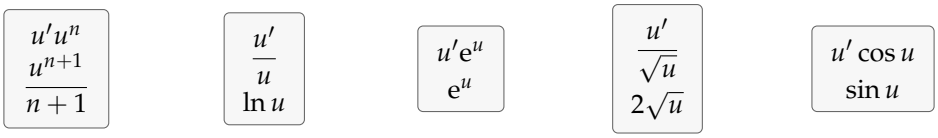


Figure 1 — Reconnaître une forme $u'f(u)$: chercher u dont la dérivée figure en facteur.

Propriété 11.5 — Formes composées

Si u est dérivable (et strictement positive quand la formule l'exige) :

$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	$u'\mathrm{e}^u$	e^u
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\cos u$	$\sin u$	$u'\sin u$	$-\cos u$

Exercice d'application 3

Déterminer une primitive de : ***a.*** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ ***b.*** $g(x)=x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

Solution.
a. Avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$, f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$: $F(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.
b. Avec $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$: $g(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$, donc $G(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}$.

Remarque — Astuce

Un facteur constant manquant se rattrape : $x\,\mathrm{e}^{x^2} = \dfrac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ a pour primitive $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$. Un facteur **variable** manquant, lui, interdit la méthode.

4. Équation différentielle $y' = ay$

Théorème 11.6 — Solutions de $y' = ay$

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions

$$x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Pour toute condition initiale $y(x_0) = y_0$, la solution est **unique**.

Exercice d'application 4

Résoudre $y' = 3y$ ***avec*** $y(0) = 2$**.**

Solution. Les solutions sont les fonctions $y(x) = C\,\mathrm{e}^{3x}$. La condition initiale donne $C = 2$:

$$y(x) = 2\,\mathrm{e}^{3x}.$$

Remarque — Lecture

$a > 0$ donne une croissance exponentielle, $a < 0$ une décroissance vers zéro. Le signe de a se lit sur le phénomène avant tout calcul.

5. Équation différentielle $y' = ay + b$

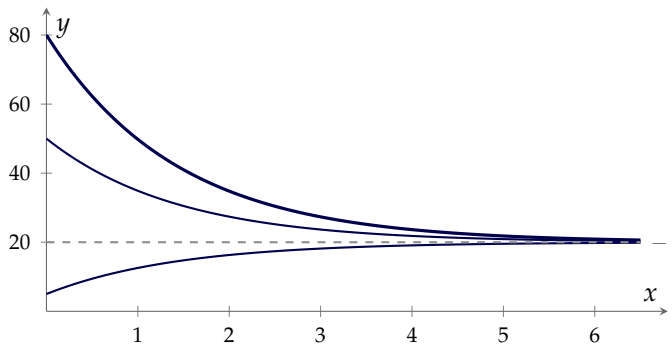


Figure 2 — Solutions de $y' = ay + b$: toutes convergent vers l'état d'équilibre lorsque $a < 0$.

Théorème 11.7 — Solutions de $y' = ay + b$

Soient $a \neq 0$ et b réels. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$x \mapsto C\,\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La fonction constante $y = -\dfrac{b}{a}$ est solution : c'est l'**état d'équilibre**. Toutes les autres solutions s'en écartent ou s'en approchent selon le signe de a.

Exercice d'application 5

Résoudre $y' = -0{,}5\,y + 10$ ***avec*** $y(0) = 4$**.**

Solution. L'équilibre vaut $-\dfrac{10}{-0{,}5} = 20$, donc $y(x) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 20$.
La condition initiale donne $C + 20 = 4$, soit $C = -16$:

$$y(x) = -16\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 20.$$

Remarque — Bon réflexe

Cherchez l'équilibre **en premier** : il donne la constante additive et permet de contrôler la limite. Ici $a < 0$, donc $y(x) \to 20$: la solution rejoint l'équilibre.

Attention — Erreur à éviter

Déterminer C **avant** d'avoir écrit la forme générale complète. La constante initiale ne s'ajuste qu'une fois le terme $-\dfrac{b}{a}$ en place, sinon elle absorbe une erreur invisible.

6. Équation différentielle $y' = ay + f$

Théorème 11.8 — Second membre variable

Soient $a \neq 0$ un réel et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si g est une solution **particulière** de l'équation $(E) : y' = ay + f$, alors les solutions de (E) sont exactement les fonctions

$$x \longmapsto g(x) + C\,\mathrm{e}^{ax}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque — Ce que dit le programme

La solution particulière g n'est jamais à deviner : l'énoncé **fournit** une fonction g et demande de *vérifier* qu'elle est solution. Le théorème donne ensuite toutes les solutions : g plus les solutions $C\,\mathrm{e}^{ax}$ de l'équation homogène $y' = ay$.

Exercice d'application 6

On considère (E) **:** $y' = 2y + \mathrm{e}^{-x}$ ***et*** $g(x) = -\dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$**. *Vérifier que*** g ***est solution de*** (E)**, *puis résoudre*** (E)**.**

Solution. D'une part $g'(x) = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$. D'autre part :

$$2g(x) + \mathrm{e}^{-x} = -\frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x} = g'(x),$$

donc g est bien solution de (E).
Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto C\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Attention — Erreur à éviter

La formule $C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ du théorème 11.7 suppose un second membre **constant**. Dès que le second membre dépend de x, elle ne s'applique plus : il faut passer par la solution particulière fournie.

7. Modélisation

Un phénomène dont la **vitesse de variation** est proportionnelle à l'écart avec une valeur limite se traduit par $y' = ay + b$. C'est le cas du refroidissement d'un corps, de la charge d'un condensateur, d'une population limitée par ses ressources, ou d'une cuve alimentée et vidangée simultanément.

La démarche, toujours la même :
1. nommer la grandeur et sa variable — souvent le temps t ;
2. traduire l'énoncé en une relation entre y' et y ;
3. identifier a et b, puis la condition initiale ;
4. résoudre, puis **revenir au contexte** : limite, seuil, interprétation.

Exercice d'application 7

Un corps à $80\,^\circ$***C est placé dans une pièce à*** $20\,^\circ$***C. Sa température*** T ***vérifie*** $T' = -0{,}1\,(T - 20)$***, le temps étant en minutes. Déterminer*** $T(t)$ ***et sa limite.***

Solution. L'équation s'écrit $T' = -0{,}1\,T + 2$: c'est $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}1$ et $b = 2$.
L'équilibre vaut $-\dfrac{2}{-0{,}1} = 20$, donc $T(t) = C\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 20$, et $T(0) = 80$ donne $C = 60$:

$$T(t) = 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} + 20.$$

Comme $a < 0$: $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 20$ — le corps rejoint la température ambiante.

Remarque — Astuce de lecture

« Diminue de 4 % par unité de temps » donne le terme $-0{,}04\,y$; « on ajoute 12 unités » donne le terme constant $+12$. Les pourcentages portent sur y, les apports fixes sont autonomes.

Méthodes

Méthode 1 — Déterminer une primitive usuelle

1. Vérifier la continuité de f et **préciser l'intervalle**.
2. Décomposer f en somme de termes du tableau.
3. Primitiver terme à terme, en conservant les coefficients.
4. Dériver pour vérifier.

Exemple éclair. $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ a pour primitives $F(x) = x^3 + \dfrac{1}{x} + C$.

Erreur à éviter. Omettre l'intervalle. $\dfrac{1}{x}$ admet $\ln|x|$ pour primitive, mais sur $]-\infty\,;0[$ **ou** sur $]0\,;+\infty[$, jamais sur les deux à la fois.

Méthode 2 — Reconnaître une forme $u'f(u)$

1. Repérer un candidat u : ce qui est sous une puissance, une racine, un logarithme ou une exponentielle.
2. Calculer u' et le chercher en facteur.
3. Ajuster par une constante si nécessaire.
4. Appliquer le tableau des formes composées, puis dériver pour vérifier.

Exemple éclair. $x\,\mathrm{e}^{x^2}$: avec $u = x^2$, $u' = 2x$; on écrit $\dfrac{1}{2} \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$, de primitive $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2}$.

Bon réflexe. Le dénominateur est presque toujours le bon candidat pour u. Dérivez-le : si le numérateur lui ressemble à une constante près, la forme est $\dfrac{u'}{u}$.

Méthode 3 — Déterminer la primitive vérifiant une condition

1. Déterminer la forme générale $F(x) + C$.
2. Écrire la condition, par exemple $F(x_0) + C = y_0$.
3. Résoudre en C.
4. Réécrire la primitive **complète**, puis vérifier la condition.

Exemple éclair. Primitives de $2x$: $x^2 + C$; la condition $F(1) = 5$ donne $C = 4$, d'où $F(x) = x^2 + 4$.

Erreur à éviter. Répondre en laissant C. La question demande **une** fonction, pas une famille : la réponse est une expression sans constante libre.

Méthode 4 — Résoudre $y' = ay + b$ avec condition initiale

1. Identifier a et b en mettant l'équation sous la forme canonique.
2. Calculer l'état d'équilibre $-\dfrac{b}{a}$.
3. Écrire la forme générale $y(x) = C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$.
4. Déterminer C par la condition initiale.
5. Contrôler : la limite doit valoir l'équilibre si $a < 0$.

Exemple éclair. $y' = 2y - 6$ avec $y(0) = 1$: l'équilibre vaut 3, donc $y(x) = C\,\mathrm{e}^{2x} + 3$ et $C = -2$. Ici $a > 0$: la solution s'éloigne de l'équilibre.

Erreur à éviter. Écrire $y = C\,\mathrm{e}^{ax} + \dfrac{b}{a}$: le signe est $-\dfrac{b}{a}$, c'est la solution constante.

Méthode 5 — Modéliser par une équation différentielle

1. Nommer la grandeur $y(t)$ et préciser son unité.
2. Traduire chaque phrase de l'énoncé en un terme : proportionnalité $\to ay$; apport ou perte fixe $\to b$.
3. Écrire la condition initiale, qui fait partie du modèle.
4. Résoudre, puis répondre **dans le contexte** : valeur limite, seuil, date.

Exemple éclair. « Diminue de 4 % par heure, apport constant de 12 L/h » : $y' = -0{,}04\,y + 12$, équilibre 300 L.
Astuce. Pour un seuil, l'inéquation $y(t) > s$ se ramène à un logarithme. Pensez à **changer le sens** de l'inégalité si vous divisez par un coefficient négatif — c'est là que se perdent les points.

Méthode 6 — Vérifier qu'une fonction est solution

Quand ? L'énoncé propose une expression et demande de vérifier qu'elle convient, souvent avant de faire résoudre le cas général.

1. Calculer y' à partir de l'expression donnée.
2. Calculer séparément $ay + b$.
3. Comparer les deux résultats — ne jamais partir de l'égalité à démontrer.
4. Vérifier la condition initiale s'il y en a une.

Exemple éclair. $y = x\,\mathrm{e}^x$ pour $y' = y + \mathrm{e}^x$: d'une part $y' = (x+1)\,\mathrm{e}^x$; d'autre part $y + \mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x$ ✓.
Bon réflexe. Cette question vaut souvent un point pour trois lignes de calcul. Elle est aussi la meilleure façon de contrôler une résolution : si votre solution ne vérifie pas l'équation, l'erreur est en amont.

Méthode 7 — Résoudre $y' = ay + f$ avec solution particulière fournie

1. **Vérifier** que la fonction g fournie est solution : calculer g' et contrôler que $g'(x) = a\,g(x) + f(x)$ pour tout x.
2. Écrire la **solution générale** : $y(x) = g(x) + C\,\mathrm{e}^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$ (théorème 11.8).
3. **Exploiter la condition initiale** pour déterminer C, puis conclure (variations, limite, interprétation).

Exemple éclair. $(E) : y' = 2y + \mathrm{e}^{-x}$ avec $g(x) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$ fournie : la vérification faite, les solutions sont $C\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-x}$ — c'est l'application 6.
Astuce de rédaction. La vérification de l'étape 1 vaut des points à elle seule : rédigez-la en une chaîne d'égalités partant de $a\,g(x) + f(x)$ et aboutissant à $g'(x)$.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Erreur	Bon réflexe
Oublier $+C$	Il y a une infinité de primitives, pas une seule
Primitiver sin en cos	C'est $-\cos$; le contrôle par dérivation le révèle
Oublier d'ajuster le coefficient de u'	Écrire $x\,\mathrm{e}^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right) \times 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$
Primitiver un produit comme un produit de primitives	Aucune formule de ce type n'existe
Écrire $y = Ce^{ax} + \frac{b}{a}$	Le signe est $-\frac{b}{a}$: c'est la solution constante
Ne pas vérifier la solution obtenue	Une substitution suffit et élimine toute erreur de signe

Module Python — méthode d'Euler pour $y' = ay + b$

```
# Methode d'Euler pour y' = a*y + b
from math import exp
def euler(a, b, y0, x_max, h):
   # approximation pas a pas de la solution
   x = 0
   y = y0
   while x < x_max - h / 2:
      y = y + h * (a * y + b)
      x = x + h
   return y
def exacte(a, b, y0, x):
   # solution exacte :  y = C * exp(a*x) - b/a avec C = y0 + b/a
   C = y0 + b / a
   return C * exp(a * x) - b / a
a = -0.5
b = 10
y0 = 80
x_max = 4
print("y' =", a, "y +", b, " y(0) =", y0, " x =", x_max)
print("valeur exacte :", round(exacte(a, b, y0, x_max), 6))
liste_h = [0.5, 0.1, 0.01, 0.001]
for i in range(len(liste_h)):
   h = liste_h[i]
   approx = euler(a, b, y0, x_max, h)
   ecart = abs(approx - exacte(a, b, y0, x_max))
   print("h =", h, " Euler :", round(approx, 6), " ecart :",
round(ecart, 6))
print("etat d'equilibre :  -b/a =", -b / a)
```

Trace d'exécution.

```
y' = -0.5 y + 10 y(0) = 80 x = 4
valeur exacte :  28.120117
h = 0.5 Euler :  26.006775 ecart :  2.113342
h = 0.1 Euler :  27.710729 ecart :  0.409388
h = 0.01 Euler :  28.079483 ecart :  0.040634
h = 0.001 Euler :  28.116057 ecart :  0.00406
etat d'equilibre :  -b/a = 20.0
```

Interprétation mathématique. La solution exacte est $y(x) = 60\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} + 20$, et $y(4) = 60\,\mathrm{e}^{-2} + 20 \approx 28{,}120$. Avec le pas grossier $h = 0{,}5$, l'erreur vaut encore environ 2,11 ; à partir de $h = 0{,}1$, elle est **divisée par 10 quand le pas l'est** : 0,409, puis 0,0406, puis 0,0041. C'est la signature d'une méthode d'**ordre 1**, dont l'erreur est proportionnelle à h.

La dernière ligne rappelle l'état d'équilibre $-\dfrac{b}{a} = 20$. La solution part de 80 et décroît vers 20 sans jamais l'atteindre — $y(4) \approx 28{,}1$ en est déjà proche.

Attention

La formule $y = C\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ exige $a \neq 0$. Pour $a = 0$, l'équation devient $y' = b$, dont les solutions sont les fonctions affines $y = bx + C$. **Ce cas se traite séparément, et le programme ci-dessus diviserait par zéro.**