Chapitre 11. Fiche d'exercices n°1

Primitives et équations différentielles

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Déterminer une primitive de chaque fonction sur l'intervalle indiqué.

a. $f(x) = 4x^3$ sur $\mathbb{R}$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

c. $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$

d. $f(x) = \dfrac{3}{x}$ sur $]0;+\infty[$

e. $f(x) = \sin x$ sur $\mathbb{R}$

f. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

Exercice 2 ⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$. La fonction f est-elle solution de l'équation différentielle $y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$?

Exercice 3 ⋆

Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de : a. $y' = 3y$ b. $y' + 6y = 0$ c. $3y' - 2y = 0$ d. $4y' + 5y = 6y + 8y'$.

Exercice 4 ⋆

Déterminer l'unique solution f vérifiant la condition indiquée. a. $y' = -10y$ et $f(0) = 4$ b. $y' + \sqrt{3}\,y = 0$ et $f\left(\sqrt{3}\right) = 5$ c. $y' = -3y + 7$ et $f(0) = 1$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 5 ⋆⋆

Déterminer une primitive de chaque fonction (formes $u'f(u)$).

a. $f(x) = 3x^2\mathrm{e}^{x^3}$

b. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+3}$ sur $]0;+\infty[$

c. $f(x) = (2x-1)\left(x^2-x\right)^4$

d. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 6 ⋆⋆

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la primitive F de f telle que $F(1) = 2$.

Exercice 7 ⋆⋆

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' = y - 3$.

a. Déterminer une solution particulière constante de (E_1).

b. Résoudre l'équation homogène $y' = y$.

c. En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).

Exercice 8 ⋆⋆

Résoudre $(E_2) : 14y' - 2y = 13y' + 6y + 10$, puis déterminer la solution f de $(E_3) : 4y' - 5y = 3$ telle que $f(3) = -2$.

Exercice 9 ⋆⋆

On considère $(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ et la fonction u définie par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

a. Vérifier que u est solution de (E).

b. Résoudre $(E') : y' + y = 0$.

c. En déduire toutes les solutions de (E), puis la solution g telle que $g(0) = 2$.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Une tasse de café à 80°C est posée dans une pièce à 20°C. On note $\theta(t)$ sa température (en °C) après t minutes. La loi de refroidissement de Newton donne $\theta' = -0{,}1\,(\theta - 20)$.

a. Écrire l'équation sous la forme $y' = ay + b$ et donner sa solution constante.

b. Déterminer $\theta(t)$ sachant que $\theta(0) = 80$.

c. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} \theta(t)$ et interpréter.

d. Au bout de combien de minutes le café est-il à 50°C ?

Exercice 11 ⋆⋆⋆

On considère $(E) : y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}$ et $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$.

a. Montrer que u est solution de (E).

b. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - u$ est solution de $y' = 2y$.

c. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + x\right)\mathrm{e}^{-x}$.

a. Montrer que $F(x) = \left(-x^2 - 3x - 3\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la primitive de f qui s'annule en 0.

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 13 ⋆⋆⋆⋆

(Modèle de Verhulst) On étudie une épidémie : $y(t)$ désigne le pourcentage de personnes touchées après t jours, avec $y(0) = 0{,}01$ et $y' = 0{,}05\,y\,(10 - y)$ sur $[0;30]$. On pose $z = \dfrac{1}{y}$.

a. Montrer que $z' = -0{,}5z + 0{,}05$ et que $z(0) = 100$.

b. Résoudre cette équation différentielle et déterminer z, puis y.

c. Calculer le pourcentage de population infectée après 30 jours (arrondi à l'entier).

Exercice 14 ⋆⋆⋆⋆

(Méthode d'Euler) On considère $y' = y$ avec $y(0) = 1$ et un pas $h = 0{,}1$. On pose $y_{n+1} = y_n + h\,y_n$.

a. Justifier que (y_n) est géométrique et exprimer y_n.

b. Comparer y_{10} à la valeur exacte e. Commenter.

c. Écrire un script Python calculant y_n pour un pas h et un nombre d'étapes n donnés.

Exercice 15 ⋆⋆⋆⋆

Soit $(E) : y'(x) = 4 - (y(x))^2$ sur $[0;+\infty[$. On considère une solution y telle que $y(x) \neq 2$, et $z = \dfrac{2+y}{2-y}$.

a. Démontrer que $z' = 4z \iff y' = 4 - y^2$.

b. En déduire que $y(x) = 2\,\dfrac{Ce^{4x}-1}{Ce^{4x}+1}$, $C \in \mathbb{R}$.

c. Déterminer la solution f vérifiant $f(0) = 0$, puis $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.