Chapitre 12. Cours

Calcul intégral

1. Intégrale d'une fonction continue positive

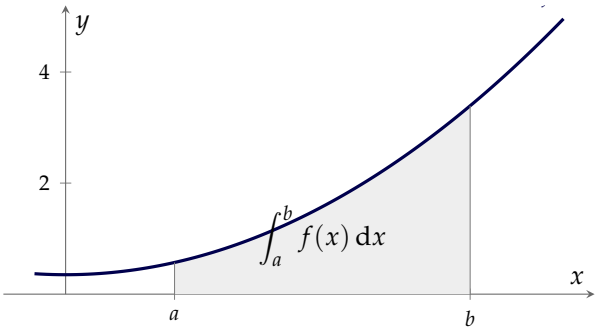


Figure 1 — L'intégrale d'une fonction positive est une aire.

Définition 12.1 — Intégrale d'une fonction continue positive

Si f est continue et **positive** sur $[a\,;b]$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarque — Bon réflexe

L'intégrale est d'abord une **aire**, pas une formule. Quand un résultat vous surprend, dessinez : une aire ne peut pas être négative sous une courbe positive.

2. Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 12.2 — Théorème fondamental

Si f est continue sur I et $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a**.

Propriété 12.3 — Conséquence, à connaître par cœur

Si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exercice d'application 1

Calculer $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$***.***

Solution. Une primitive de x^2 est $\dfrac{x^3}{3}$:

$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}.$$

Remarque — Astuce

La constante d'intégration ne sert à rien ici : elle disparaît dans la soustraction $F(b) - F(a)$. Choisissez la primitive la plus simple.

3. Extension aux fonctions de signe quelconque

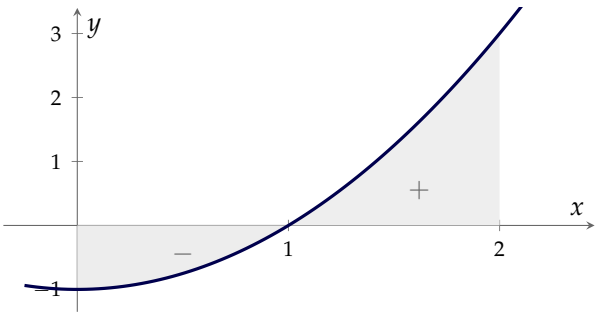


Figure 2 — Aire algébrique : le signe compte. Ici $f(x) = x^2 - 1$ sur $[0\,;2]$.

Lorsque f change de signe, l'intégrale devient une **aire algébrique** : les portions situées sous l'axe comptent négativement.

Exercice d'application 2

Pour $f(x) = x^2 - 1$***, calculer*** $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ ***puis l'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses sur*** $[0\,;2]$***.***

Solution. Avec $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$: $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \frac{2}{3}$.
Pour l'aire, on découpe au point d'annulation $x = 1$:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3},$$

donc $\mathcal{A} = \left|-\dfrac{2}{3}\right| + \dfrac{4}{3} = 2$ unités d'aire — et non $\dfrac{2}{3}$.

Attention — Erreur à éviter

Confondre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'aire du domaine. Si f change de signe, l'aire vaut $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$: il faut découper l'intervalle aux points d'annulation et sommer les valeurs absolues.

4. Propriétés

Théorème 12.4 — Linéarité et relation de Chasles

Pour f et g continues et λ réel :

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(relation de Chasles).}$$

Enfin $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice d'application 3

On sait que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ ***et*** $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$***. Calculer*** $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ ***et*** $\int_0^3 \big(2f(x)+1\big)\,\mathrm{d}x$***.***

Solution. Par Chasles : $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3+5 = 8$.

Par linéarité : $\int_0^3 \big(2f(x)+1\big)\,\mathrm{d}x = 2\times 8 + \int_0^3 1\,\mathrm{d}x = 16+3 = 19$.

Théorème 12.5 — Positivité et ordre

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Si de plus $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice d'application 4

Démontrer que $1 \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}$***.***

Solution. Sur $[0\,;1]$: $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, donc $1 \leqslant \mathrm{e}^{x^2} \leqslant \mathrm{e}$ par croissance de l'exponentielle.
En intégrant cet encadrement sur $[0\,;1]$, de longueur 1 :

$$1 \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e}.$$

Attention — Erreur à éviter

Ces deux propriétés **exigent** $a \leqslant b$. Avec les bornes inversées, les inégalités changent de sens.

Remarque — Bon réflexe

Il n'existe **aucune** formule pour l'intégrale d'un produit ou d'un quotient : $\int fg \neq \left(\int f\right) \times \left(\int g\right)$. C'est l'erreur la plus coûteuse du chapitre.

5. Valeur moyenne

Définition 12.6 — Valeur moyenne

La **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$, avec $a < b$, est

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice d'application 5

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ ***sur*** $[0\,;2]$**.**

Solution. Avec l'application 1 :

$$\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Remarque — Lecture géométrique

μ est la hauteur du rectangle de base $[a\,;b]$ qui a la même aire que le domaine sous la courbe. Le rectangle « lisse » la courbe.

6. Intégration par parties

Théorème 12.7 — Intégration par parties (approfondissement)

Si u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice d'application 6

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$**.**

Solution. On dérive $v(x) = x$ et on intègre $u'(x) = \mathrm{e}^x$, soit $u(x) = \mathrm{e}^x$:

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{e}^x\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$$

Remarque — Astuce du choix

On dérive ce qui se simplifie, on intègre ce qui ne se dégrade pas. Un polynôme se dérive jusqu'à disparaître ; e^x et $\sin x$ ne changent pas de nature.

Attention — Erreur à éviter

Oublier le signe moins devant la seconde intégrale, ou omettre les crochets. Écrivez la formule complète **avant** de remplacer : c'est un point de barème à chaque sujet.

7. Aire entre deux courbes

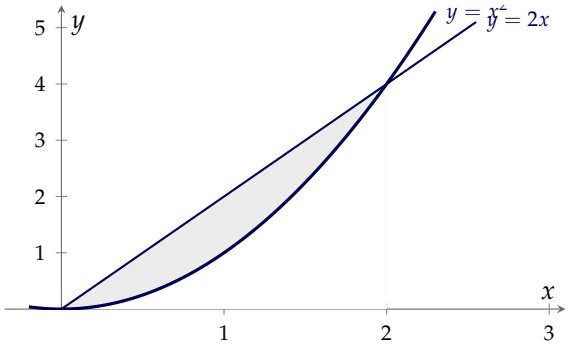


Figure 3 — Aire entre deux courbes : ici $2x \geqslant x^2$ sur $[0\,;2]$.

Propriété 12.8 — Aire entre deux courbes

Si $f \geqslant g$ sur $[a\,;b]$, l'aire du domaine compris entre les deux courbes vaut

$$\mathcal{A} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice d'application 7

Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes $y = 2x$ et $y = x^2$.

Solution. Intersections : $2x = x^2 \iff x(x-2) = 0$, soit $x = 0$ et $x = 2$. Sur $[0\,;2]$, $2x \geqslant x^2$:

$$\mathcal{A} = \int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ unités d'aire.}$$

Remarque — Bon réflexe

Déterminez d'abord les abscisses d'intersection en résolvant $f(x) = g(x)$, puis **étudiez le signe** de $f - g$ pour savoir laquelle des deux est au-dessus. Intervertir les deux fonctions donne l'aire au signe près.

8. Encadrement par des rectangles

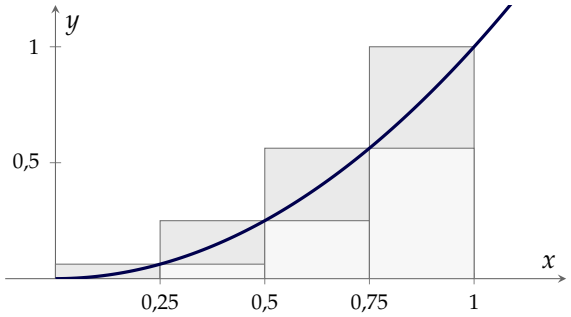


Figure 4 — Encadrement par les rectangles de Riemann ($n = 4$).

Si f est continue et monotone sur $[a\,;b]$, on découpe l'intervalle en n parties de même longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$. La somme des aires des rectangles inférieurs minore l'intégrale, celle des rectangles supérieurs la majore, et l'écart entre les deux vaut $|f(b) - f(a)| \times h$, qui tend vers 0.
Ces sommes sont appelées **sommes de Riemann**.

Exercice d'application 8

Pour $f(x) = x^2$ ***sur*** $[0\,;1]$ ***et*** $n = 4$***, calculer les deux sommes de Riemann et vérifier qu'elles encadrent*** $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$***.***

Solution. Avec $h = \dfrac{1}{4}$ et f croissante :

$$s_4 = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16}\right) = \frac{14}{64} = 0{,}21875$$

$$S_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + 1\right) = \frac{30}{64} = 0{,}46875.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$: on a bien $s_4 \leqslant \dfrac{1}{3} \leqslant S_4$, et $S_4 - s_4 = \dfrac{1}{4} = h$ puisque $f(1) - f(0) = 1$.

Remarque — Astuce

L'écart entre les deux encadrements décroît en $\dfrac{1}{n}$. Pour gagner une décimale, il faut multiplier n par dix — c'est ce que le module Python de ce chapitre met en évidence.

Méthodes

Méthode 1 — Calculer une intégrale par primitive

Quand ? C'est la voie ordinaire : dès qu'une primitive est identifiable.

1. Vérifier que f est continue sur $[a\,;b]$.
2. Déterminer **une** primitive F — la plus simple, sans constante.
3. Écrire $\big[F(x)\big]_a^b$, puis calculer $F(b) - F(a)$.
4. Contrôler en dérivant F : on doit retrouver f.

Exemple éclair. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln x\big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}693$.

Bon réflexe. Vérifiez la continuité **sur tout l'intervalle**. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ n'existe pas : la fonction n'est pas définie en 0.

Méthode 2 — Reconnaître une forme composée

Quand ? L'intégrande ressemble à $u' \times$ (fonction de u).

1. Repérer un candidat u — souvent ce qui est sous une puissance, une racine, un logarithme ou une exponentielle.
2. Calculer u' et le chercher en facteur, quitte à ajuster par une constante.
3. Appliquer le tableau des formes usuelles.
4. Dériver pour vérifier.

Exemple éclair. Pour $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$, on écrit $\displaystyle\frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}$: la primitive est $\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$, et l'intégrale vaut $\displaystyle\frac{1}{2}\ln 2$.

Astuce. Le facteur constant manquant se rattrape toujours ; un facteur variable manquant interdit la méthode.

Méthode 3 — Intégrer par parties

Quand ? L'intégrande est un **produit** de deux fonctions de natures différentes, et aucune forme composée n'apparaît.

1. Choisir v (à dériver) et u' (à intégrer) — voir l'astuce du cours.
2. Calculer v' et u.
3. Écrire la formule **en entier**, crochets et signe compris.
4. Calculer le crochet, puis la nouvelle intégrale — qui doit être plus simple.

Exemple éclair. $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$: on dérive x, on intègre e^x ; le calcul donne 1 — c'est l'application 6.

Erreur à éviter. Si la nouvelle intégrale est **plus compliquée** que la première, c'est que le choix est inversé. Reprenez en échangeant u' et v plutôt que de vous acharner.

Méthode 4 — Calculer une aire entre deux courbes

1. Résoudre $f(x) = g(x)$ pour obtenir les bornes.
2. Étudier le **signe** de $f - g$ sur l'intervalle.
3. Intégrer la différence, en plaçant en premier la fonction du dessus.
4. Préciser l'unité : le résultat s'exprime en **unités d'aire**.

Exemple éclair. Entre $y = 2x$ et $y = x^2$: bornes 0 et 2, puis $\displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

Bon réflexe. Une aire est positive. Un résultat négatif signale que vous avez inversé les deux fonctions — prenez l'opposé et signalez-le dans la rédaction plutôt que de recommencer.

Méthode 5 — Encadrer une intégrale sans la calculer

Quand ? La primitive est inaccessible, ou l'énoncé demande un encadrement.

1. Encadrer f sur $[a\,;b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

2. Intégrer l'encadrement — licite car $a \leqslant b$ — pour obtenir

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

3. Affiner si nécessaire en découpant l'intervalle.

Exemple éclair. Sur $[0\,;1]$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \leqslant 1$ — la valeur exacte, $\ln 2 \approx 0{,}693$, est bien dedans.

Astuce. Pour une suite $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$, un encadrement bien choisi suffit presque toujours à conclure sur la limite par le théorème des gendarmes, sans jamais calculer I_n.

Méthode 6 — Étudier une suite d'intégrales

Quand ? L'énoncé pose $I_n = \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et demande monotonie, signe, limite ou relation de récurrence. C'est l'exercice de fin de sujet le plus fréquent.

1. **Signe.** Étudier le signe de f_n sur $[a\,;b]$ et conclure par positivité.
2. **Monotonie.** Former $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_a^b \big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et étudier le signe de l'intégrande — jamais celui de la différence des résultats.
3. **Récurrence.** Une intégration par parties relie souvent I_{n+1} à I_n.
4. **Limite.** Encadrer, puis appliquer le théorème des gendarmes.

Exemple éclair. $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$: sur $[0\,;1]$, $x^{n+1} \leqslant x^n$ donne $I_{n+1} \leqslant I_n$; et $I_n = \dfrac{1}{n+1} \to 0$.

Erreur à éviter. Comparer I_{n+1} et I_n en calculant chacun séparément. On ne sait généralement pas les calculer — c'est tout l'intérêt de la question. Comparez les **intégrandes** sous une seule intégrale.

Erreurs fréquentes et bons réflexes

Erreur	Bon réflexe
Écrire $\int fg = \left(\int f\right)\left(\int g\right)$	Aucune formule de ce type n'existe
Laisser x dans le résultat	La variable d'intégration est muette
Ajouter $+C$ dans une intégrale définie	La constante s'élimine par différence
Confondre intégrale et aire pour $f \leqslant 0$	L'intégrale est une aire **algébrique**
Appliquer la positivité avec $a > b$	La positivité et la croissance exigent $a \leqslant b$
Intégrer entre deux courbes sans étudier le signe	Découper aux points d'intersection
Choisir $v = \mathrm{e}^x$ dans l'IPP	On choisit v dont la dérivée **simplifie**

Module Python — méthodes des rectangles et des trapèzes

```
# Methodes des rectangles et des trapezes
def f(x):
  return x ** 2
def rectangles_gauche(a, b, n):
  h = (b - a) / n
  s = 0
  for k in range(n):
     s = s + f(a + k * h)
  return s * h
def rectangles_droite(a, b, n):
  h = (b - a) / n
  s = 0
  for k in range(1, n + 1):
     s = s + f(a + k * h)
  return s * h
def trapezes(a, b, n):
  return (rectangles_gauche(a, b, n) + rectangles_droite(a, b, n)) /
2
exact = 1 / 3
print("Integrale de x**2 sur [0 ; 1], exacte :", round(exact, 8))
liste_n = [4, 10, 100, 1000]
for i in range(len(liste_n)):
  n = liste_n[i]
  g = rectangles_gauche(0, 1, n)
  d = rectangles_droite(0, 1, n)
  t = trapezes(0, 1, n)
  print("n =", n, " gauche :", round(g, 8), " droite :", round(d, 8))
  print(" trapezes :", round(t, 8))
```

Trace d'exécution.

```
Integrale de x**2 sur [0 ; 1], exacte :  0.33333333
n = 4 gauche :  0.21875 droite :  0.46875
trapezes :  0.34375
n = 10 gauche :  0.285 droite :  0.385
trapezes :  0.335
n = 100 gauche :  0.32835 droite :  0.33835
trapezes :  0.33335
n = 1000 gauche :  0.3328335 droite :  0.3338335
trapezes :  0.3333335
```

Interprétation mathématique. La fonction x^2 étant **croissante** sur $[0\,;1]$, la somme de gauche minore l'intégrale et celle de droite la majore : $0{,}32835 \leqslant \dfrac{1}{3} \leqslant 0{,}33835$ pour $n = 100$. C'est exactement l'encadrement du §8.

L'écart entre les deux sommes vaut $\big[f(1) - f(0)\big] \times h = \dfrac{1}{n}$: on lit 0,25, 0,1, 0,01, 0,001 en soustrayant les deux colonnes. ✓

La méthode des trapèzes, moyenne des deux, converge bien plus vite : son erreur est **divisée par 100 quand n est multiplié par 10**, ce qui la place à l'ordre 2, contre l'ordre 1 des rectangles.

Attention

L'encadrement *gauche* $\leqslant I \leqslant$ *droite* **suppose f croissante**. Pour une fonction décroissante, les rôles s'inversent ; pour une fonction non monotone, il faut découper. **La monotonie est l'hypothèse qui rend la méthode valide.**