Devoir surveillé n°7 · 13 mars 2025

Primitives, équations différentielles et calcul intégral

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Exercice 1 — Vrai ou faux (4 points)

Justifier chaque réponse.

1. La fonction $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0;+\infty[$.
2. Les solutions de $y' = -2y + 6$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-2x} + 3$, $C \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx = e^{-1} - 1$.
4. Si $f \leqslant g$ sur $[a;b]$ (avec $a < b$), alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Exercice 2 — Calculs (5 points)

Calculer les intégrales suivantes en détaillant.

a. $\displaystyle\int_1^2 \left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$

d. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

Exercice 3 — Étude et aire (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;3]$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0;3]$.
2. Montrer que $F(x) = (-x-2)e^{-x}$ est une primitive de f sur $[0;3]$.
3. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$, puis une valeur approchée à 10^{-2}. Interpréter graphiquement.
4. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0;2]$.
5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 4 — Modélisation (5 points)

Une cuve contient 30 m^3 de liquide. Chaque heure, 20 % du volume s'évapore tandis qu'un apport continu ajoute 4 m^3 par heure. On modélise le volume $y(t)$ (en m^3) après t heures par l'équation différentielle $y' = -0{,}2y + 4$ avec $y(0) = 30$.

1. Déterminer la solution constante de cette équation différentielle et l'interpréter.
2. Déterminer l'expression de $y(t)$.

3. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ et interpréter.
4. Au bout de combien d'heures le volume devient-il inférieur à 21 m^3 ? Justifier par le calcul.
5. Écrire une fonction Python `seuil(v)` renvoyant le premier entier t (en heures) tel que $y(t) < v$, en utilisant l'expression trouvée à la question 2.