Chapitre 12. Fiche d'exercices n°1

Calcul intégral

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

Calculer les intégrales suivantes en déterminant d'abord une primitive.

a. $\displaystyle\int_0^3 x\,\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ e. $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

b. $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ f. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 ⋆

Calculer : a. $\displaystyle\int_{-2}^1 (3x^2-5x+1)\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{4x}+\mathrm{e}^{-2x+1}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 3 ⋆

On donne $\displaystyle\int_0^2 f = 5$ et $\displaystyle\int_2^6 f = -3$. Calculer $\displaystyle\int_0^6 f$, $\displaystyle\int_6^0 f$ et $\displaystyle\int_0^2 3f$.

Exercice 4 ⋆

Déterminer la valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0;3]$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 5 ⋆⋆

Calculer, en reconnaissant une forme $u'f(u)$.

a. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$

b. $\displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ d. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 6 ⋆⋆

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Exprimer en fonction de n : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 ⋆⋆

Calculer à l'aide d'une intégration par parties. a. $\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ b. $\int_1^{\mathrm{e}} t\ln t\,\mathrm{d}t$ c. $\int_1^5 \ln t\,\mathrm{d}t$ d. $\int_0^{\pi/2} t\cos t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8 ⋆⋆

Soit $f(x)=x^2$ et $g(x)=x$ sur $[0;1]$.

a. Étudier le signe de $g(x)-f(x)$ sur $[0;1]$.

b. Calculer l'aire du domaine compris entre les deux courbes sur $[0;1]$.

Exercice 9 ⋆⋆

Calculer $\int_1^2 \dfrac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$ en écrivant $x=(x+1)-1$ au numérateur.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Soit $f(x)=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^x$ sur $[-1;1]$.

a. Justifier que $f(x)\geqslant 0$ sur $[-1;1]$.

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^1 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

c. En déduire la valeur exacte de $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis une valeur approchée à 10^{-2}.

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Soit $f(x)=x-\ln\left(x^2+1\right)$ sur $[0;+\infty[$ et $I=\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$ et en déduire son signe.

b. Interpréter graphiquement I.

c. On admet que pour $x\in[2;4]$, $0{,}5x-1\leqslant f(x)\leqslant 0{,}25x+0{,}25$. En déduire $1\leqslant I\leqslant 2$.

Exercice 12 ⋆⋆⋆

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que $v_0+v_1=1$.

b. Montrer que $v_n\geqslant 0$ pour tout n.

c. Montrer que pour $n\geqslant 1$, $v_{n+1}+v_n=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$, puis que $v_n\leqslant\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

d. En déduire $\lim v_n$.

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 13 ⋆⋆⋆⋆

Déterminer le sens de variation des suites d'intégrales suivantes. a. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$ b. $K_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^{nx}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 14 ⋆⋆⋆⋆

Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ à l'aide de deux intégrations par parties successives.

Exercice 15 ⋆⋆⋆⋆

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = -1 + J$.
b. De même, montrer que $J = \mathrm{e}^{\pi/2} - I$.
c. En déduire les valeurs exactes de I et J.

Exercice 16 ⋆⋆⋆⋆

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin x\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_0.
b. Justifier que $I_n \geqslant 0$, puis que $I_{n+1} \leqslant I_n$. Que peut-on en déduire ?
c. Montrer que $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$ pour $n \geqslant 1$, et en déduire $\lim I_n$.