Devoir surveillé n°10 · 3 juin 2025

Sommes de variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

Durée : 2 heures · Calculatrice autorisée

Exercice 1 — Vrai ou faux (4 points)

Justifier chaque réponse.

1. Pour toutes variables aléatoires X et Y, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
2. Pour toutes variables aléatoires X et Y, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
3. Si $V(X) = 9$ alors $V(2X-5) = 31$.
4. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de même loi d'écart-type σ, alors $\sigma\left(M_n\right) = \dfrac{\sigma}{n}$.

Exercice 2 — Somme et moyenne (5 points)

Une machine remplit des sachets. La masse X d'un sachet vérifie $E(X) = 500$ g et $\sigma(X) = 8$ g. On prélève n sachets, dont les masses $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi que X. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

1. Calculer $E\left(S_{25}\right)$ et $\sigma\left(S_{25}\right)$.
2. Calculer $E\left(M_{25}\right)$ et $\sigma\left(M_{25}\right)$.
3. À partir de quelle valeur de n a-t-on $\sigma\left(M_n\right) \leqslant 0{,}5$ g ?
4. Un carton contient 25 sachets et une boîte vide de masse 150 g. On note T la masse totale du carton. Exprimer T en fonction de S_{25}, puis calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$.

Exercice 3 — Inégalités de concentration (6 points)

Une chaîne de production fournit des pièces dont 8 % sont non conformes. On prélève un échantillon de n pièces (assimilé à un tirage avec remise) ; X_n désigne le nombre de pièces non conformes et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la fréquence correspondante.

1. Donner la loi de X_n, puis $E\left(X_n\right)$ et $V\left(X_n\right)$.
2. Démontrer que $E\left(F_n\right) = 0{,}08$ et $V\left(F_n\right) = \dfrac{0{,}0736}{n}$.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P\left(\left|F_n - 0{,}08\right| \geqslant 0{,}03\right)$ en fonction de n.
4. Déterminer la taille minimale n de l'échantillon pour que cette probabilité soit inférieure ou égale à 0,05.
5. Sur un échantillon de 500 pièces, on observe 60 pièces non conformes. Cet écart est-il surprenant ? Justifier à l'aide de la question 3.

Exercice 4 — Démonstration (5 points)

1. Énoncer l'inégalité de Markov, en précisant ses hypothèses.

2. En appliquant l'inégalité de Markov à la variable $Y = (X - E(X))^2$, démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2. Démontrer que pour tout $\delta > 0$: $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{n\delta^2}$, puis en déduire la loi faible des grands nombres.