Chapitre 13. Fiche d'exercices n°1

Sommes de variables aléatoires et échantillonnage

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

X est une variable aléatoire telle que $E(X) = 5$ et $V(X) = 4$. Calculer : a. $E(3X)$ b. $E(X-2)$ c. $V(3X)$ d. $V(X-2)$ e. $\sigma(2X+7)$.

Exercice 2 ⋆

X et Y sont deux variables aléatoires avec $E(X) = 2$, $E(Y) = -3$, $V(X) = 1$ et $V(Y) = 5$.

a. Calculer $E(X+Y)$ et $E(2X-Y)$.

b. Calculer $V(X+Y)$ en supposant X et Y indépendantes.

c. Peut-on calculer $V(X+Y)$ sans cette hypothèse ?

Exercice 3 ⋆

$X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, d'espérance $\mu = 4$ et d'écart-type $\sigma = 2$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $M_n = \dfrac{S_n}{n}$. Calculer $E(S_n)$, $V(S_n)$, $E(M_n)$ et $V(M_n)$ pour $n = 25$.

Exercice 4 ⋆

X suit $\mathcal{B}(50\,;0{,}4)$. Donner $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 5 ⋆⋆

Dans un atelier, deux machines A et B produisent des pièces défectueuses. On note X et Y les nombres de pièces défectueuses produites en une minute par A et par B, à valeurs dans $\{0;1;2\}$. La loi conjointe est donnée ci-dessous.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,10	0,10	0,05
1	0,05	0,20	0,10
2	0,05	0,10	0,25

a. Déterminer les lois marginales de X et de Y.

b. On pose $S = X + Y$. Quelles valeurs S peut-elle prendre ? Déterminer sa loi.

c. Calculer $E(S)$ de deux façons.

d. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

Exercice 6 ⋆⋆

Un jeu coûte 2 € la partie. On gagne 10 € avec la probabilité 0,15, sinon rien. On note X le gain algébrique pour une partie.

a. Donner la loi de X, puis $E(X)$ et $V(X)$. Le jeu est-il favorable ?

b. Un joueur fait 20 parties indépendantes. On note S son gain total. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

Exercice 7 ⋆⋆

X suit $\mathcal{B}(n\,;p)$. Justifier que X peut s'écrire comme une somme de n variables de Bernoulli indépendantes, puis retrouver $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

Exercice 8 ⋆⋆

X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et suivent toutes $\mathcal{B}(250\,;0{,}01)$. On pose $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$ en justifiant.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 9 ⋆⋆⋆

Une société offre à chacun de ses 1 000 clients réguliers un bon d'achat ; on note Y_1 le total, en euros, de ces bons, avec $E(Y_1) = 30\,000$ et $V(Y_1) = 100\,000$. Par ailleurs, X_2, le nombre de clients possédant la carte de fidélité, suit $\mathcal{B}(1000\,;0{,}47)$, et une prime de 50 € est versée à chacun d'eux : $Y_2 = 50X_2$.

a. Calculer $E(X_2)$ et interpréter.

b. Calculer $E(Y_2)$ et $V(Y_2)$.

c. On pose $Y = Y_1 + Y_2$ (les variables sont indépendantes) et $Z = \dfrac{Y}{1000}$. Que modélise Z ? Vérifier que $E(Z) = 53{,}5$ et $V(Z) = 0{,}72275$.

Exercice 10 ⋆⋆⋆

On lance n fois un dé équilibré et on note S_n la somme des résultats.

a. Calculer l'espérance et la variance du résultat d'un lancer.

b. En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

c. Déterminer $E(M_n)$ et $\sigma(M_n)$ pour la moyenne $M_n = \dfrac{S_n}{n}$, puis calculer $\sigma(M_{100})$.

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Une entreprise mesure la masse d'un composant : $E(X) = 250$ g et $\sigma(X) = 4$ g. On prélève un échantillon de n composants indépendants.

a. Exprimer $\sigma(M_n)$ en fonction de n.

b. À partir de quelle valeur de n a-t-on $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}5$ g ?

c. Pour diviser l'écart-type de M_n par 3, par combien faut-il multiplier n ?

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 12 ⋆⋆⋆⋆

Démontrer que pour toute variable aléatoire X admettant une variance et tous réels a et b : $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Exercice 13 ⋆⋆⋆⋆

X et Y sont indépendantes, $X \sim \mathcal{B}(n\,;p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m\,;p)$.

a. Justifier, sans calcul de loi, que $E(X+Y) = (n+m)p$ et $V(X+Y) = (n+m)p(1-p)$.

b. Expliquer pourquoi il est naturel de conjecturer que $X+Y$ suit $\mathcal{B}(n+m\,;p)$.

Exercice 14 ⋆⋆⋆⋆

Deux variables X et Y prennent les valeurs -1 et 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacune, et l'on pose $Y = -X$.

a. Vérifier que $E(X) = E(Y) = 0$ et $V(X) = V(Y) = 1$.

b. Calculer $V(X+Y)$. Que constate-t-on ? Conclure.

Exercice 15 ⋆⋆⋆⋆

Écrire un script Python qui simule N échantillons de taille n d'un lancer de dé, calcule la moyenne de chaque échantillon puis l'écart-type observé des moyennes ; comparer à $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.