Chapitre 14. Fiche d'exercices n°1

Inégalités de concentration et loi des grands nombres

Série A ⋆ — Automatismes

Exercice 1 ⋆

X est une variable aléatoire positive d'espérance $E(X) = 3$. Majorer, à l'aide de l'inégalité de Markov : a. $P(X \geqslant 6)$ b. $P(X \geqslant 15)$ c. $P(X \geqslant 2)$. Commenter le dernier résultat.

Exercice 2 ⋆

X vérifie $E(X) = 50$ et $V(X) = 16$. Majorer $P\left(|X - 50| \geqslant 8\right)$, puis minorer $P\left(|X - 50| < 8\right)$.

Exercice 3 ⋆

X suit $\mathcal{B}(100\,;0{,}5)$. Donner $E(X)$ et $V(X)$, puis majorer $P\left(|X - 50| \geqslant 10\right)$.

Exercice 4 ⋆

$X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes de même loi, avec $\mu = 6$ et $\sigma^2 = 4$. Majorer $P\left(|M_n - 6| \geqslant 0{,}2\right)$ pour $n = 400$.

Série B ⋆⋆ — Entraînement

Exercice 5 ⋆⋆

Un fournisseur affirme que la durée de vie moyenne de ses ampoules est $\mu = 1200$ heures avec un écart-type $\sigma = 150$ heures.

a. Majorer la probabilité que la durée de vie d'une ampoule s'écarte de plus de 450 heures de la moyenne.

b. On teste 100 ampoules. Majorer $P\left(|M_{100} - 1200| \geqslant 30\right)$.

Exercice 6 ⋆⋆

F_n désigne la fréquence de succès sur n épreuves indépendantes de probabilité p.

a. Justifier que $E\left(F_n\right) = p$ et $V\left(F_n\right) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

b. Démontrer que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour tout $p \in [0;1]$.

c. En déduire que $P\left(|F_n - p| \geqslant \delta\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\delta^2}$.

Exercice 7 ⋆⋆

On souhaite estimer la proportion p d'électeurs favorables à une mesure. Combien de personnes faut-il interroger pour que la probabilité que la fréquence observée s'écarte de p de plus de 0,02 soit inférieure à 0,05 ?

Exercice 8 ⋆⋆

Énoncer la loi faible des grands nombres, puis expliquer en quoi elle justifie l'estimation d'une probabilité par une fréquence observée.

Série C ⋆⋆⋆ — Type bac

Exercice 9 ⋆⋆⋆

Les connexions à un réseau sont instables avec la probabilité 0,145. On étudie un échantillon de n connexions ; X_n compte les connexions instables et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$.

a. Donner la loi de X_n, puis $E(F_n)$. On admet $V(F_n) = \dfrac{0{,}123975}{n}$.

b. Vérifier que $P(|F_n - 0{,}145| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{12{,}5}{n}$.

c. Un responsable observe $F_{1000} = 0{,}3$ et soupçonne un dysfonctionnement. A-t-il raison ? Justifier.

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Une variable Z vérifie $E(Z) = 53{,}5$ et $V(Z) = 0{,}72275$.

a. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que $P(51{,}7 < Z < 55{,}3) > 0{,}75$.

b. Peut-on en déduire la valeur exacte de $P(51{,}7 < Z < 55{,}3)$?

Exercice 11 ⋆⋆⋆

Un dé est lancé n fois ; F_n est la fréquence d'apparition du 6.

a. Majorer $P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0{,}05\right)$ en fonction de n (on utilisera $V(F_n) = \frac{5}{36n}$).

b. Déterminer n pour que cette probabilité soit inférieure à 0,01.

c. Comparer avec la majoration obtenue par $\dfrac{1}{4n\delta^2}$. Laquelle est la meilleure ? Pourquoi ?

Série D ⋆⋆⋆⋆ — Approfondissement

Exercice 12 ⋆⋆⋆⋆

Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à partir de l'inégalité de Markov appliquée à la variable $Y = (X - E(X))^2$.

Exercice 13 ⋆⋆⋆⋆

X suit $\mathcal{B}(100\,;0{,}5)$.

a. Majorer $P(|X - 50| \geqslant 20)$ par Bienaymé-Tchebychev.

b. La calculatrice donne $P\left(|X - 50| \geqslant 20\right) \approx 7{,}9 \times 10^{-5}$. Commenter l'écart avec la majoration.

Exercice 14 ⋆⋆⋆⋆

Écrire un script Python simulant N répétitions de n lancers d'une pièce, calculant la fréquence de « pile » de chaque répétition, puis la proportion de répétitions pour lesquelles $|F_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}05$. Comparer avec la majoration théorique pour $n = 100$ et $n = 1000$.

Exercice 15 ⋆⋆⋆⋆

Soit (X_n) une suite de variables indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2. Démontrer que pour tout $\delta > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(|M_n - \mu| \geqslant \delta\right) = 0$.