TERMINALE SPÉCIALITÉ · DEVOIR SURVEILLÉ N°1

Corrigé détaillé

Les points de méthode attendus sont en **gras**

Exercice 1

1. **Faux.** $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ est croissante, majorée par 2, mais $\lim u_n = 1 \neq 2$. Le théorème garantit seulement $\lim u_n \leqslant M$.
2. **Faux.** Il manque la minoration : $u_n = -n$ vérifie $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $\lim u_n = -\infty$.
3. **Vrai.** $u_n = \dfrac{2^n}{3^n(1+3^{-n})} = \dfrac{(2/3)^n}{1+(1/3)^n} \to \dfrac{0}{1} = 0$.
4. **Faux.** Forme indéterminée : $u_n = n^2$, $v_n = -n$ donnent $u_n + v_n = n(n-1) \to +\infty$.
5. **Vrai.** $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ donc $3 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{1}{n}$; par le **théorème des gendarmes**, $\lim u_n = 3$.

Exercice 2

1. F.I. $-\infty + \infty$. $u_n = n^2\left(-3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$; $n^2 \to +\infty$ et la parenthèse $\to -3$; **produit** : $\lim u_n = -\infty$.
2. $v_n = \dfrac{n^2(2 - \frac{1}{n})}{n^2(3 + \frac{4}{n^2})} = \dfrac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n^2}} \to \dfrac{2}{3}$.
3. **Quantité conjuguée** : $w_n = \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+3n} + n} = \dfrac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1\right)} = \dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + 1} \to \dfrac{3}{2}$.
4. Factorisation par 4^n : $t_n = \dfrac{1 + \frac{n}{4^n}}{1 - (\frac{1}{2})^n}$. Or $0 \leqslant \frac{n}{4^n} \leqslant \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}$ et on admet $\frac{n}{4^n} \to 0$ (ou : $4^n \geqslant n^2$ pour $n \geqslant 1$ donc $\frac{n}{4^n} \leqslant \frac{1}{n}$). Donc $\lim t_n = 1$.

Exercice 3

1. $u_1 = \frac{8}{4} + 3 = 5$; $u_2 = \frac{5}{4} + 3 = 4{,}25$.
2. $P(n)$: « $u_n \geqslant 4$ ». **Initialisation** : $u_0 = 8 \geqslant 4$. **Hérédité** : si $u_n \geqslant 4$, alors $\frac{1}{4}u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 4$. **Conclusion** : par récurrence, $u_n \geqslant 4$ pour tout n.
3. $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3 = \frac{3}{4}(4 - u_n) \leqslant 0$ d'après 2. Donc (u_n) est **décroissante**.
4. Décroissante et minorée par 4 : d'après le **théorème de convergence monotone**, (u_n) converge.
5. $v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$. **Géométrique** de raison $\frac{1}{4}$ et $v_0 = 4$.
6. $v_n = 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $u_n = 4 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n = 4 + 4^{1-n}$. Comme $0 < \frac{1}{4} < 1$, $\lim u_n = 4$.
7. `while u - 4 >= 0.001: / u = u/4 + 3 / n = n + 1`. (Résultat : $4^{1-n} < 10^{-3} \iff 4^{n-1} > 1000 \iff n - 1 \geqslant 5$, soit $n = 6$.)

Exercice 4

1. $x \mapsto 3x + 4$ est croissante et $\sqrt{\ }$ est croissante sur $[0; +\infty[$: composée de fonctions croissantes, f est croissante. (Ou : $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} > 0$.)

2. **Init.** $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{4} = 2 : 0 \leqslant 0 \leqslant 2 \leqslant 4$. **Hér.** Si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, comme f est croissante : $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$, soit $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \sqrt{16} = 4$; et $0 \leqslant 2$. **Concl.** vrai pour tout n.
3. (u_n) est croissante et majorée par 4 : elle converge vers ℓ, et par passage à la limite dans $u_n \leqslant 4$, $\ell \leqslant 4$.
4. $\ell = \sqrt{3\ell + 4} \Rightarrow \ell^2 - 3\ell - 4 = 0 \Rightarrow (\ell - 4)(\ell + 1) = 0$. Comme $\ell \geqslant 0$, $\ell = 4$.
5. $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4} = \dfrac{16 - (3u_n + 4)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \dfrac{3(4 - u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + 4}$. Or $\sqrt{3u_n + 4} \geqslant 0$ donc le dénominateur est $\geqslant 4$; et $4 - u_n \geqslant 0$. D'où $4 - u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(4 - u_n)$.
6. Par récurrence immédiate ($4 - u_0 = 4$ et hérédité par la question 5) : $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Comme $(\frac{3}{4})^n \to 0$, par les **gendarmes** $\lim(4 - u_n) = 0$, donc $\lim u_n = 4 = \ell$.