DEVOIR SURVEILLÉ N°1 · 7 SEPTEMBRE 2024

Corrigé

Exercice 1

1. $\dfrac{7}{n^2} \to 0$ donc $\lim u_n = 4$.
2. $u_n = n^3\left(-3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}\right)$; $n^3 \to +\infty$ et la parenthèse $\to -3$: par produit, $\lim u_n = -\infty$.
3. Factorisation par n : $u_n = \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{5 - \frac{3}{n}} \to \dfrac{2}{5}$.
4. $0 < 0{,}4 < 1$ donc $0{,}4^n \to 0$ et $\lim u_n = -2$.
5. $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\pm\dfrac{1}{n} \to 0$: par les gendarmes $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$, donc $\lim u_n = 1$.
6. Quantité conjuguée : $\sqrt{n+4} - \sqrt{n} = \dfrac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}$; le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim u_n = 0$.

Exercice 2

1. $u_1 = 3$, $u_2 = 7$, $u_3 = 15$.
2. Les valeurs $1, 3, 7, 15$ sont $2^1 - 1$, $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^4 - 1$: on conjecture $u_n = 2^{n+1} - 1$.
3. *Initialisation.* $2^1 - 1 = 1 = u_0$. *Hérédité.* Si $u_n = 2^{n+1} - 1$, alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+2} - 1$. *Conclusion.* Par récurrence, $u_n = 2^{n+1} - 1$ pour tout n.
4. $2 > 1$ donc $2^{n+1} \to +\infty$ et $\lim u_n = +\infty$.
5. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{9}\left(2^{k+1} - 1\right) = \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}\right) - 10 = 2 \cdot \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} - 10 = 2(2^{10} - 1) - 10 = 2046 - 10 = 2036$.

Exercice 3

1. $u_1 = \frac{1}{2} \times 6 + 2 = 5$; $u_2 = \frac{1}{2} \times 5 + 2 = 4{,}5$.
2. $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 6 - 4 = 2$.
3. $v_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n + 4 = 4 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
4. $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ et $\lim u_n = 4$.
5. $u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$: la suite est strictement décroissante.
6. $u_n - 4 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}01 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}005 \iff 2^n > 200$. Comme $2^7 = 128 < 200$ et $2^8 = 256 > 200$, le plus petit entier est $n = 8$ (vérification : $u_8 - 4 = \frac{2}{256} \approx 0{,}0078$).

DEVOIR SURVEILLÉ N°1 · 30 SEPTEMBRE 2025

Corrigé détaillé

Exercice 1

a. Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise chaque facteur par son terme dominant : $2n - n^2 = n^2\left(\frac{2}{n} - 1\right)$, $n - 1 = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $5 - 2n = n\left(\frac{5}{n} - 2\right)$. Donc $u_n = \dfrac{n^2\left(\frac{2}{n} - 1\right)}{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{5}{n} - 2\right)} = \dfrac{\frac{2}{n} - 1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{5}{n} - 2\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{-1}{1 \times (-2)} = \dfrac{1}{2}$.

b. Pour tout n, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ donc $n - 1 \leqslant n - \sin n \leqslant n + 1$. Comme $n - 1 \to +\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim(n - \sin n) = +\infty$; le dénominateur est strictement positif dès $n \geqslant 2$ et tend vers $+\infty$, donc $\lim v_n = 0$.

c. Forme $\infty - \infty$. On factorise par 5^n : $w_n = 5^n\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$. Or $\lim 5^n = +\infty$ ($5 > 1$) et $\left(\frac{3}{5}\right)^n \to 0$ ($0 < \frac{3}{5} < 1$), donc la parenthèse tend vers 1 : par produit, $\lim w_n = +\infty$.

d. Forme $\infty - \infty$. Quantité conjuguée : $a_n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+5} - n\right)\left(\sqrt{n^2+5} + n\right)}{\sqrt{n^2+5} + n} = \dfrac{n^2 + 5 - n^2}{\sqrt{n^2+5} + n} = \dfrac{5}{\sqrt{n^2+5} + n}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim a_n = 0$.

Exercice 2

a. **Vrai.** Soit ℓ la limite. L'intervalle $]\ell - 1; \ell + 1[$ contient tous les termes à partir d'un rang N : pour $n \geqslant N$, $u_n > \ell - 1$. Les termes $u_0, \ldots, u_{N-1}$ sont en nombre fini ; le réel $m = \min(u_0, \ldots, u_{N-1}, \ell - 1)$ minore donc toute la suite. (Une suite convergente est même bornée.)

b. **Faux.** Contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ ($n \geqslant 1$) et $v_n = (-1)^n$. Alors (u_n) converge vers 0 et $u_n v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 (gendarmes : $-\frac{1}{n} \leqslant u_n v_n \leqslant \frac{1}{n}$), mais (v_n) n'a pas de limite.

c. **Vrai.** Récurrence sur $P(n)$: « $u_n \geqslant 1$ ». *Initialisation.* $u_0 = 1{,}5 \geqslant 1$. *Hérédité.* Si $u_n \geqslant 1$, alors $3u_n - 2 \geqslant 1$, donc $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$ est bien défini et $u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} = 1$. *Conclusion* : la suite est minorée par 1.

d. **Vrai.** Si la suite convergeait, elle serait bornée (voir a.), donc majorée. Par contraposée, une suite non majorée ne converge pas : elle est divergente (elle peut tendre vers $+\infty$ ou ne pas avoir de limite, comme $u_n = n\cos(n\pi) = (-1)^n n$).

e. **Faux.** D'abord, le quotient peut ne pas être défini si $v_n = 0$. Ensuite, même défini, il peut diverger : $u_n = 1$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ ($n \geqslant 1$) convergent, mais $\dfrac{u_n}{v_n} = n \to +\infty$. L'affirmation devient vraie si $\lim v_n \neq 0$.

Exercice 3

1. a. $P(n)$: « $u_n \leqslant n + 3$ ». *Initialisation.* $u_0 = 2 \leqslant 3$. *Hérédité.* Supposons $u_n \leqslant n + 3$. Alors $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leqslant \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{2n+6+n+3}{3} = n + 3 \leqslant (n+1) + 3$. *Conclusion* : vrai pour tout n.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(-u_n + n + 3) = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. D'après 1.a, $n + 3 - u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: la suite (u_n) est croissante.

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

b. $v_n = v_0 q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, et comme $u_n = v_n + n$: $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$; et $n \to +\infty$. Par somme, $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 4

1. a. $P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ ». *Initialisation.* $0 \leqslant 1 \leqslant 4$. *Hérédité.* Si $0 \leqslant u_n \leqslant 4$, alors $0 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n\sqrt{u_n}$ est un produit de facteurs positifs : $u_{n+1} \geqslant 0$; de plus $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$. *Conclusion* : vrai pour tout n.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n\sqrt{u_n} - u_n = u_n\left(\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1\right)$. Or $u_n \geqslant 0$ et $\sqrt{u_n} \leqslant 2$ (question a), donc $\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 \leqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite est décroissante.

c. Décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ, avec $0 \leqslant \ell \leqslant u_0 = 1$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x\sqrt{x}$ étant continue, ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}\ell\sqrt{\ell}$, soit $\ell\left(1 - \frac{\sqrt{\ell}}{2}\right) = 0$: $\ell = 0$ ou $\sqrt{\ell} = 2$ (c'est-à-dire $\ell = 4$). Comme $\ell \leqslant 1$, $\ell = 0$.

2. La suite étant décroissante, $u_n \leqslant u_0 = 1$ pour tout n, donc $\sqrt{u_n} \leqslant 1$. Ainsi $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n\sqrt{u_n} \leqslant \frac{1}{2}u_n \times 1 = \frac{1}{2}u_n$.

3. a. $S_{n+1} - 1 = S_{n+1} - u_0 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1}$. D'après la question 2 appliquée à chaque terme, $u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}u_k$ pour $k = 0, \ldots, n$, donc en sommant : $u_1 + \cdots + u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_0 + \cdots + u_n) = \frac{1}{2}S_n$. D'où $S_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}S_n$.

b. Tous les termes u_k sont positifs, donc $S_n \geqslant 0$. Par ailleurs $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, et la question a. donne $S_n + u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}S_n$, soit $\frac{1}{2}S_n \leqslant 1 - u_{n+1}$, soit $S_n \leqslant 2(1 - u_{n+1})$.

c. Pour $n \geqslant 1$: $0 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant \dfrac{2(1 - u_{n+1})}{n} \leqslant \dfrac{2}{n}$ (car $u_{n+1} \geqslant 0$). Comme $\frac{2}{n} \to 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0$.

DEVOIR SURVEILLÉ N°2 · 8 OCTOBRE 2025

Corrigé

Exercice 1

1. **Faux.** Le théorème de convergence monotone garantit la convergence vers un réel $\ell \geqslant -2$, pas l'égalité : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est décroissante, minorée par -2, et converge vers 0.
2. **Vrai.** $n^2 - 100 \to +\infty$; par le théorème de comparaison, $\lim u_n = +\infty$.
3. **Vrai.** En factorisant par 5^n : $u_n = \dfrac{5^n}{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right)} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} \to \dfrac{1}{0+1} = 1$.
4. **Faux.** C'est la forme indéterminée $\infty \times 0$: avec $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$, $u_n v_n = n \to +\infty$.

Exercice 2

1. Forme $\frac{\infty}{\infty}$; on factorise par n^2 : $u_n = \dfrac{-1 + \frac{6}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} \to -\dfrac{1}{2}$.
2. Forme $\infty - \infty$; quantité conjuguée : $v_n = \dfrac{(n^2+2n) - n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \dfrac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1} \to \dfrac{2}{1+1} = 1$.
3. $-2 \leqslant 2\cos n \leqslant 2$ donc $\dfrac{-n-2}{n+3} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{-n+2}{n+3}$. Or $\dfrac{-n-2}{n+3} = \dfrac{-1-\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} \to -1$ et $\dfrac{-n+2}{n+3} \to -1$: par les gendarmes, $\lim w_n = -1$.
4. On factorise par 3^n : $t_n = \dfrac{3^n\left(3 + \frac{1}{3^n}\right)}{3^n\left(1 - \frac{2}{3^n}\right)} = \dfrac{3 + \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{2}{3^n}} \to \dfrac{3}{1} = 3$.

Exercice 3

1. $x \mapsto 2x + 8$ est croissante et la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$: leur composée f est croissante. $f(4) = \sqrt{16} = 4$.
2. *Initialisation.* $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{8} \approx 2{,}83$: $0 \leqslant 0 \leqslant \sqrt{8} \leqslant 4$. *Hérédité.* Supposons $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. Comme f est croissante, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$, soit $\sqrt{8} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$; et $0 \leqslant \sqrt{8}$. Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$. *Conclusion* par récurrence.
3. La suite est croissante et majorée par 4 : elle converge vers un réel ℓ (théorème de convergence monotone). Par passage à la limite dans $u_n \leqslant 4$, $\ell \leqslant 4$.
4. $\ell = \sqrt{2\ell + 8} \Rightarrow \ell^2 = 2\ell + 8 \Rightarrow \ell^2 - 2\ell - 8 = 0 \Rightarrow (\ell - 4)(\ell + 2) = 0$. Comme $\ell \geqslant 0$, $\ell = 4$.
5. $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{2u_n + 8} = \dfrac{(4 - \sqrt{2u_n+8})(4 + \sqrt{2u_n+8})}{4 + \sqrt{2u_n+8}} = \dfrac{16 - 2u_n - 8}{\sqrt{2u_n+8} + 4} = \dfrac{2(4-u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+4}$. Comme $\sqrt{2u_n+8} \geqslant 0$, le dénominateur est $\geqslant 4$; et $4 - u_n \geqslant 0$ d'après la question 2. Donc $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2(4-u_n)}{4} = \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

6. Par récurrence : $4 - u_0 = 4 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^0$, et si $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors $0 \leqslant 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Comme $4\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim(4 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim u_n = 4$: on retrouve $\ell = 4$.

Exercice 4

1. Après consommation de 20 %, il reste 80 % du volume, soit $0{,}8u_n$; on ajoute ensuite 150 L. $u_1 = 0{,}8 \times 1000 + 150 = 950$.
2. $v_{n+1} = u_{n+1} - 750 = 0{,}8u_n + 150 - 750 = 0{,}8u_n - 600 = 0{,}8(u_n - 750) = 0{,}8v_n$: géométrique de raison 0,8, premier terme $v_0 = 250$. Donc $v_n = 250 \times 0{,}8^n$ et $u_n = 750 + 250 \times 0{,}8^n$.
3. $0{,}8^n \to 0$ donc $\lim u_n = 750$: à long terme, le volume du réservoir se stabilise autour de 750 L.
4. $u_{n+1} - u_n = 250 \times 0{,}8^{n+1} - 250 \times 0{,}8^n = 250 \times 0{,}8^n(0{,}8 - 1) = -50 \times 0{,}8^n < 0$: la suite est strictement décroissante.
5. `while u >= 760:` et `u = 0.8*u + 150`. Calcul : $u_n < 760 \iff 250 \times 0{,}8^n < 10 \iff 0{,}8^n < 0{,}04 \iff n \ln 0{,}8 < \ln 0{,}04 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}04}{\ln 0{,}8} \approx 14{,}4$ (changement de sens car $\ln 0{,}8 < 0$). La fonction renvoie 15 ; vérification : $u_{14} \approx 761{,}0$ et $u_{15} \approx 758{,}8$.