DEVOIR SURVEILLÉ N°1 · 7 SEPTEMBRE 2024

Corrigé

Exercice 1

1. $\dfrac{7}{n^2} \to 0$ donc $\lim u_n = 4$.
2. $u_n = n^3\left(-3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^3}\right)$; $n^3 \to +\infty$ et la parenthèse $\to -3$: par produit, $\lim u_n = -\infty$.
3. Factorisation par n : $u_n = \dfrac{2 + \frac{1}{n}}{5 - \frac{3}{n}} \to \dfrac{2}{5}$.
4. $0 < 0{,}4 < 1$ donc $0{,}4^n \to 0$ et $\lim u_n = -2$.
5. $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\pm\dfrac{1}{n} \to 0$: par les gendarmes $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$, donc $\lim u_n = 1$.
6. Quantité conjuguée : $\sqrt{n+4} - \sqrt{n} = \dfrac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}}$; le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim u_n = 0$.

Exercice 2

1. $u_1 = 3$, $u_2 = 7$, $u_3 = 15$.
2. Les valeurs $1, 3, 7, 15$ sont $2^1 - 1$, $2^2 - 1$, $2^3 - 1$, $2^4 - 1$: on conjecture $u_n = 2^{n+1} - 1$.
3. *Initialisation.* $2^1 - 1 = 1 = u_0$. *Hérédité.* Si $u_n = 2^{n+1} - 1$, alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+2} - 1$. *Conclusion.* Par récurrence, $u_n = 2^{n+1} - 1$ pour tout n.
4. $2 > 1$ donc $2^{n+1} \to +\infty$ et $\lim u_n = +\infty$.
5. $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{9}\left(2^{k+1} - 1\right) = \left(2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}\right) - 10 = 2 \cdot \dfrac{1 - 2^{10}}{1 - 2} - 10 = 2(2^{10} - 1) - 10 = 2046 - 10 = 2036$.

Exercice 3

1. $u_1 = \frac{1}{2} \times 6 + 2 = 5$; $u_2 = \frac{1}{2} \times 5 + 2 = 4{,}5$.
2. $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 6 - 4 = 2$.
3. $v_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n + 4 = 4 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
4. $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ et $\lim u_n = 4$.
5. $u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$: la suite est strictement décroissante.
6. $u_n - 4 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}01 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}005 \iff 2^n > 200$. Comme $2^7 = 128 < 200$ et $2^8 = 256 > 200$, le plus petit entier est $n = 8$ (vérification : $u_8 - 4 = \frac{2}{256} \approx 0{,}0078$).