DEVOIR SURVEILLÉ N°1 · 30 SEPTEMBRE 2025

Corrigé détaillé

Exercice 1

a. Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise chaque facteur par son terme dominant : $2n - n^2 = n^2\left(\frac{2}{n} - 1\right)$, $n - 1 = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $5 - 2n = n\left(\frac{5}{n} - 2\right)$. Donc $u_n = \dfrac{n^2\left(\frac{2}{n} - 1\right)}{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{5}{n} - 2\right)} = \dfrac{\frac{2}{n} - 1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{5}{n} - 2\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{-1}{1 \times (-2)} = \dfrac{1}{2}$.

b. Pour tout n, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ donc $n - 1 \leqslant n - \sin n \leqslant n + 1$. Comme $n - 1 \to +\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim(n - \sin n) = +\infty$; le dénominateur est strictement positif dès $n \geqslant 2$ et tend vers $+\infty$, donc $\lim v_n = 0$.

c. Forme $\infty - \infty$. On factorise par 5^n : $w_n = 5^n\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$. Or $\lim 5^n = +\infty$ ($5 > 1$) et $\left(\frac{3}{5}\right)^n \to 0$ ($0 < \frac{3}{5} < 1$), donc la parenthèse tend vers 1 : par produit, $\lim w_n = +\infty$.

d. Forme $\infty - \infty$. Quantité conjuguée : $a_n = \dfrac{\left(\sqrt{n^2+5} - n\right)\left(\sqrt{n^2+5} + n\right)}{\sqrt{n^2+5} + n} = \dfrac{n^2 + 5 - n^2}{\sqrt{n^2+5} + n} = \dfrac{5}{\sqrt{n^2+5} + n}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim a_n = 0$.

Exercice 2

a. **Vrai.** Soit ℓ la limite. L'intervalle $]\ell - 1; \ell + 1[$ contient tous les termes à partir d'un rang N : pour $n \geqslant N$, $u_n > \ell - 1$. Les termes $u_0, \ldots, u_{N-1}$ sont en nombre fini ; le réel $m = \min(u_0, \ldots, u_{N-1}, \ell - 1)$ minore donc toute la suite. (Une suite convergente est même bornée.)

b. **Faux.** Contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ ($n \geqslant 1$) et $v_n = (-1)^n$. Alors (u_n) converge vers 0 et $u_n v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 (gendarmes : $-\frac{1}{n} \leqslant u_n v_n \leqslant \frac{1}{n}$), mais (v_n) n'a pas de limite.

c. **Vrai.** Récurrence sur $P(n)$: « $u_n \geqslant 1$ ». *Initialisation.* $u_0 = 1{,}5 \geqslant 1$. *Hérédité.* Si $u_n \geqslant 1$, alors $3u_n - 2 \geqslant 1$, donc $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$ est bien défini et $u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} = 1$. *Conclusion* : la suite est minorée par 1.

d. **Vrai.** Si la suite convergeait, elle serait bornée (voir a.), donc majorée. Par contraposée, une suite non majorée ne converge pas : elle est divergente (elle peut tendre vers $+\infty$ ou ne pas avoir de limite, comme $u_n = n\cos(n\pi) = (-1)^n n$).

e. **Faux.** D'abord, le quotient peut ne pas être défini si $v_n = 0$. Ensuite, même défini, il peut diverger : $u_n = 1$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$ ($n \geqslant 1$) convergent, mais $\dfrac{u_n}{v_n} = n \to +\infty$. L'affirmation devient vraie si $\lim v_n \neq 0$.

Exercice 3

1. a. $P(n)$: « $u_n \leqslant n + 3$ ». *Initialisation.* $u_0 = 2 \leqslant 3$. *Hérédité.* Supposons $u_n \leqslant n + 3$. Alors $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leqslant \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{2n+6+n+3}{3} = n + 3 \leqslant (n+1) + 3$. *Conclusion* : vrai pour tout n.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(-u_n + n + 3) = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. D'après 1.a, $n + 3 - u_n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: la suite (u_n) est croissante.

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

b. $v_n = v_0 q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$, et comme $u_n = v_n + n$: $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$; et $n \to +\infty$. Par somme, $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 4

1. a. $P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 4$ ». *Initialisation.* $0 \leqslant 1 \leqslant 4$. *Hérédité.* Si $0 \leqslant u_n \leqslant 4$, alors $0 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n\sqrt{u_n}$ est un produit de facteurs positifs : $u_{n+1} \geqslant 0$; de plus $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$. *Conclusion* : vrai pour tout n.

b. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n\sqrt{u_n} - u_n = u_n\left(\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1\right)$. Or $u_n \geqslant 0$ et $\sqrt{u_n} \leqslant 2$ (question a), donc $\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 \leqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite est décroissante.

c. Décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ, avec $0 \leqslant \ell \leqslant u_0 = 1$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x\sqrt{x}$ étant continue, ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}\ell\sqrt{\ell}$, soit $\ell\left(1 - \frac{\sqrt{\ell}}{2}\right) = 0$: $\ell = 0$ ou $\sqrt{\ell} = 2$ (c'est-à-dire $\ell = 4$). Comme $\ell \leqslant 1$, $\ell = 0$.

2. La suite étant décroissante, $u_n \leqslant u_0 = 1$ pour tout n, donc $\sqrt{u_n} \leqslant 1$. Ainsi $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n\sqrt{u_n} \leqslant \frac{1}{2}u_n \times 1 = \frac{1}{2}u_n$.

3. a. $S_{n+1} - 1 = S_{n+1} - u_0 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n+1}$. D'après la question 2 appliquée à chaque terme, $u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}u_k$ pour $k = 0, \ldots, n$, donc en sommant : $u_1 + \cdots + u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_0 + \cdots + u_n) = \frac{1}{2}S_n$. D'où $S_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}S_n$.

b. Tous les termes u_k sont positifs, donc $S_n \geqslant 0$. Par ailleurs $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, et la question a. donne $S_n + u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}S_n$, soit $\frac{1}{2}S_n \leqslant 1 - u_{n+1}$, soit $S_n \leqslant 2(1 - u_{n+1})$.

c. Pour $n \geqslant 1$: $0 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant \dfrac{2(1 - u_{n+1})}{n} \leqslant \dfrac{2}{n}$ (car $u_{n+1} \geqslant 0$). Comme $\frac{2}{n} \to 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0$.