DEVOIR SURVEILLÉ N°2 · 8 OCTOBRE 2025

Corrigé

Exercice 1

1. **Faux.** Le théorème de convergence monotone garantit la convergence vers un réel $\ell \geqslant -2$, pas l'égalité : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est décroissante, minorée par -2, et converge vers 0.
2. **Vrai.** $n^2 - 100 \to +\infty$; par le théorème de comparaison, $\lim u_n = +\infty$.
3. **Vrai.** En factorisant par 5^n : $u_n = \dfrac{5^n}{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right)} = \dfrac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} \to \dfrac{1}{0+1} = 1$.
4. **Faux.** C'est la forme indéterminée $\infty \times 0$: avec $u_n = n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$, $u_n v_n = n \to +\infty$.

Exercice 2

1. Forme $\frac{\infty}{\infty}$; on factorise par n^2 : $u_n = \dfrac{-1 + \frac{6}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} \to -\dfrac{1}{2}$.
2. Forme $\infty - \infty$; quantité conjuguée : $v_n = \dfrac{(n^2+2n) - n^2}{\sqrt{n^2+2n} + n} = \dfrac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + 1} \to \dfrac{2}{1+1} = 1$.
3. $-2 \leqslant 2\cos n \leqslant 2$ donc $\dfrac{-n-2}{n+3} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{-n+2}{n+3}$. Or $\dfrac{-n-2}{n+3} = \dfrac{-1-\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} \to -1$ et $\dfrac{-n+2}{n+3} \to -1$: par les gendarmes, $\lim w_n = -1$.
4. On factorise par 3^n : $t_n = \dfrac{3^n\left(3 + \frac{1}{3^n}\right)}{3^n\left(1 - \frac{2}{3^n}\right)} = \dfrac{3 + \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{2}{3^n}} \to \dfrac{3}{1} = 3$.

Exercice 3

1. $x \mapsto 2x + 8$ est croissante et la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$: leur composée f est croissante. $f(4) = \sqrt{16} = 4$.
2. *Initialisation.* $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{8} \approx 2{,}83$: $0 \leqslant 0 \leqslant \sqrt{8} \leqslant 4$. *Hérédité.* Supposons $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. Comme f est croissante, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$, soit $\sqrt{8} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$; et $0 \leqslant \sqrt{8}$. Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$. *Conclusion* par récurrence.
3. La suite est croissante et majorée par 4 : elle converge vers un réel ℓ (théorème de convergence monotone). Par passage à la limite dans $u_n \leqslant 4$, $\ell \leqslant 4$.
4. $\ell = \sqrt{2\ell + 8} \Rightarrow \ell^2 = 2\ell + 8 \Rightarrow \ell^2 - 2\ell - 8 = 0 \Rightarrow (\ell - 4)(\ell + 2) = 0$. Comme $\ell \geqslant 0$, $\ell = 4$.
5. $4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{2u_n + 8} = \dfrac{(4 - \sqrt{2u_n+8})(4 + \sqrt{2u_n+8})}{4 + \sqrt{2u_n+8}} = \dfrac{16 - 2u_n - 8}{\sqrt{2u_n+8} + 4} = \dfrac{2(4-u_n)}{\sqrt{2u_n+8}+4}$. Comme $\sqrt{2u_n+8} \geqslant 0$, le dénominateur est $\geqslant 4$; et $4 - u_n \geqslant 0$ d'après la question 2. Donc $4 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2(4-u_n)}{4} = \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

6. Par récurrence : $4 - u_0 = 4 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^0$, et si $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors $0 \leqslant 4 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Comme $4\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim(4 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim u_n = 4$: on retrouve $\ell = 4$.

Exercice 4

1. Après consommation de 20 %, il reste 80 % du volume, soit $0{,}8u_n$; on ajoute ensuite 150 L. $u_1 = 0{,}8 \times 1000 + 150 = 950$.
2. $v_{n+1} = u_{n+1} - 750 = 0{,}8u_n + 150 - 750 = 0{,}8u_n - 600 = 0{,}8(u_n - 750) = 0{,}8v_n$: géométrique de raison 0,8, premier terme $v_0 = 250$. Donc $v_n = 250 \times 0{,}8^n$ et $u_n = 750 + 250 \times 0{,}8^n$.
3. $0{,}8^n \to 0$ donc $\lim u_n = 750$: à long terme, le volume du réservoir se stabilise autour de 750 L.
4. $u_{n+1} - u_n = 250 \times 0{,}8^{n+1} - 250 \times 0{,}8^n = 250 \times 0{,}8^n(0{,}8 - 1) = -50 \times 0{,}8^n < 0$: la suite est strictement décroissante.
5. `while u >= 760:` et `u = 0.8*u + 150`. Calcul : $u_n < 760 \iff 250 \times 0{,}8^n < 10 \iff 0{,}8^n < 0{,}04 \iff n \ln 0{,}8 < \ln 0{,}04 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}04}{\ln 0{,}8} \approx 14{,}4$ (changement de sens car $\ln 0{,}8 < 0$). La fonction renvoie 15 ; vérification : $u_{14} \approx 761{,}0$ et $u_{15} \approx 758{,}8$.