Corrigés détaillés

Corrigé — Exercice 1

Pour chaque égalité, on note $P(n)$ la propriété et on raisonne par récurrence sur $n \geqslant 1$.
a. *Initialisation.* $n = 1$: $1 = \frac{1\times 2}{2}$. *Hérédité.* Supposons $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors $1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, ce qui est $P(n+1)$. *Conclusion.* Vrai pour tout $n \geqslant 1$.
b. *Initialisation.* $1 \times 2 = 2$ et $\frac{1\times 2\times 3}{3} = 2$. *Hérédité.* Si la somme jusqu'à $n(n+1)$ vaut $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$, en ajoutant le terme $(n+1)(n+2)$: $\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$. *Conclusion* par récurrence.
c. *Initialisation.* $1^2 = 1$ et $\frac{1\times 2\times 3}{6} = 1$. *Hérédité.* On ajoute $(n+1)^2$: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$. Or $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$ (on développe pour vérifier), d'où $\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$: c'est $P(n+1)$. *Conclusion* par récurrence.

Corrigé — Exercice 2

a. *Initialisation.* $4^0 + 5 = 6 = 3 \times 2$. *Hérédité.* Supposons $4^n + 5 = 3k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Alors $4^{n+1} + 5 = 4 \times 4^n + 5 = 4(4^n + 5) - 15 = 4 \times 3k - 15 = 3(4k - 5)$: multiple de 3. *Conclusion* : vrai pour tout n.
b. On note $A_n = 12^n + 10^{2n+1}$. *Initialisation.* $A_0 = 1 + 10 = 11$. *Hérédité.* Si $A_n = 11k$, alors $A_{n+1} = 12^{n+1} + 10^{2n+3} = 12 \times 12^n + 100 \times 10^{2n+1} = 12\left(12^n + 10^{2n+1}\right) + 88 \times 10^{2n+1} = 12 \times 11k + 11 \times 8 \times 10^{2n+1} = 11\left(12k + 8 \times 10^{2n+1}\right)$. *Conclusion* par récurrence.
c. On note $B_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$. *Initialisation.* $B_0 = 3 + 4 = 7$. *Hérédité.* Si $B_n = 7k$, alors $B_{n+1} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 9\left(3^{2n+1} + 2^{n+2}\right) - 7 \times 2^{n+2} = 7\left(9k - 2^{n+2}\right)$. *Conclusion* par récurrence.

Corrigé — Exercice 3

Initialisation. $S_1 = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$. *Hérédité.* Supposons $S_n = \frac{n}{n+1}$. Alors $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$. *Conclusion* : $S_n = \frac{n}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. (Remarque : on retrouve ce résultat avec $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ et une somme télescopique.)

Corrigé — Exercice 4

Pour $n = 4$, $2^4 = 16 = 4^2$: l'inégalité stricte est fausse, on démontre donc $P(n)$: « $2^n > n^2$ » pour $n \geqslant 5$. *Initialisation.* $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. *Hérédité.* Soit $n \geqslant 5$ tel que $2^n > n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2$. Il reste à montrer $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, c'est-à-dire $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$, soit $(n-1)^2 \geqslant 2$, vrai dès que $n \geqslant 3$. Donc $2^{n+1} > (n+1)^2$. *Conclusion* : vrai pour tout $n \geqslant 5$.

Corrigé — Exercice 5

$P(n)$: « f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = nx^{n-1}$ ». *Initialisation.* $f_1(x) = x$ est dérivable et $f_1'(x) = 1 = 1 \times x^0$. *Hérédité.* Supposons $P(n)$. On a $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n \times x = f_n(x) \times f_1(x)$: produit de deux fonctions dérivables, donc dérivable, et d'après la formule $(uv)' = u'v + uv'$: $f_{n+1}'(x) = nx^{n-1} \times x + x^n \times 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n$. C'est $P(n+1)$. *Conclusion* : vrai pour tout $n \geqslant 1$.

Corrigé — Exercice 6

La fonction $f(x) = \sqrt{x+15}$ est croissante sur $[-15;+\infty[$.
a. $P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 5$ ». *Initialisation.* $u_0 \in [0;4] \subset [0;5]$. *Hérédité.* Si $0 \leqslant u_n \leqslant 5$, alors $15 \leqslant u_n + 15 \leqslant 20$, donc $\sqrt{15} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{20}$. Comme $\sqrt{15} \geqslant 0$ et $\sqrt{20} \approx 4{,}47 \leqslant 5$, on a $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. *Conclusion* par récurrence.
b. $P(n)$: « $4 \leqslant u_n \leqslant 10$ ». *Initialisation.* $u_0 \in [5;10] \subset [4;10]$. *Hérédité.* Si $4 \leqslant u_n \leqslant 10$, alors $19 \leqslant u_n + 15 \leqslant 25$, donc $\sqrt{19} \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. Comme $\sqrt{19} \approx 4{,}36 \geqslant 4$ et $5 \leqslant 10$, on a $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$. *Conclusion* par récurrence.

Corrigé — Exercice 7

Initialisation. $T_1 = 1 < 2 = 2\sqrt{1}$. *Hérédité.* Supposons $T_n < 2\sqrt{n}$. Alors $T_{n+1} = T_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Montrons que $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\sqrt{n+1}$: cela équivaut à $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (quantité conjuguée), soit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1}$, soit $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$, ce qui est vrai. Donc $T_{n+1} < 2\sqrt{n+1}$. *Conclusion* : vrai pour tout $n \geqslant 1$.

Corrigé — Exercice 8

Encadrement. $P(n)$: « $0 < u_n < 2$ ». *Initialisation.* $0 < 1 < 2$. *Hérédité.* Si $0 < u_n < 2$, alors $2 < 2 + u_n < 4$, donc $\sqrt{2} < u_{n+1} < 2$, et $\sqrt{2} > 0$. *Conclusion* par récurrence.
Croissance. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n$. Comme $u_n > 0$, $u_n < \sqrt{2+u_n} \iff u_n^2 < 2 + u_n \iff u_n^2 - u_n - 2 < 0 \iff (u_n - 2)(u_n + 1) < 0$, ce qui est vrai car $0 < u_n < 2$. Donc $u_{n+1} > u_n$: la suite est croissante. (On peut aussi démontrer par récurrence $u_n \leqslant u_{n+1}$ en utilisant la croissance de $x \mapsto \sqrt{2+x}$.)

Corrigé — Exercice 9

On note p_n le nombre de poignées de mains lorsque n personnes sont entrées. La $(n+1)$-ième personne serre la main des n personnes déjà présentes : $p_{n+1} = p_n + n$, avec $p_1 = 0$. On calcule $p_2 = 1$, $p_3 = 3$, $p_4 = 6$ et on conjecture $p_n = \frac{n(n-1)}{2}$. *Initialisation.* $p_1 = 0 = \frac{1\times 0}{2}$. *Hérédité.* Si $p_n = \frac{n(n-1)}{2}$, alors $p_{n+1} = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1)+2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}$. *Conclusion* : $p_n = \frac{n(n-1)}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Corrigé — Exercice 10

a. Supposons $10^n + 1 = 9k$. Alors $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10(10^n + 1) - 9 = 90k - 9 = 9(10k - 1)$: la propriété est héréditaire.
b. Non : il manque l'initialisation. Pour $n = 0$, $10^0 + 1 = 2$ n'est pas multiple de 9 ; pour $n = 1$, 11 non plus. En fait $10^n + 1$ n'est jamais multiple de 9 (la somme de ses chiffres vaut 2). Cet exercice montre qu'une propriété héréditaire peut être fausse pour tout n : l'initialisation est indispensable.

Corrigé — Exercice 11

a. $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 3$, $u_4 = 6$: on conjecture $u_n = \frac{n(n-1)}{2}$. *Initialisation.* $u_0 = 0 = \frac{0\times(-1)}{2}$. *Hérédité.* $u_{n+1} = u_n + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$, qui est bien $\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}$. *Conclusion* par récurrence.

b. $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$, $u_4 = \frac{1}{4}$: on conjecture $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$. *Initialisation.* $u_1 = 1 = \frac{1}{1}$. *Hérédité.* Si $u_n = \frac{1}{n}$, $u_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1}$. *Conclusion* par récurrence.
c. $u_1 = \sqrt{10}$, $u_2 = \sqrt{11}$, $u_3 = \sqrt{12}$: on conjecture $u_n = \sqrt{n+9}$. *Initialisation.* $u_0 = 3 = \sqrt{9}$. *Hérédité.* Si $u_n = \sqrt{n+9}$, alors $u_{n+1} = \sqrt{1+(n+9)} = \sqrt{n+10} = \sqrt{(n+1)+9}$. *Conclusion* par récurrence.

Corrigé — Exercice 12

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{x^2-2}{2x^2}$, du signe de $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Sur $]0;+\infty[$, $f'(x) < 0$ pour $x < \sqrt{2}$ et $f'(x) > 0$ pour $x > \sqrt{2}$: f est décroissante sur $]0;\sqrt{2}]$ et croissante sur $[\sqrt{2};+\infty[$. Son minimum vaut $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.
2. D'abord $u_n > 0$ pour tout n (récurrence immédiate : $u_0 > 0$ et si $u_n > 0$, u_{n+1} est la demi-somme de deux réels strictement positifs). Pour $n \geqslant 1$, $u_n = f(u_{n-1})$ avec $u_{n-1} > 0$; d'après la question 1, $f(x) \geqslant \sqrt{2}$ pour tout $x > 0$, donc $u_n \geqslant \sqrt{2}$. (Vérification : $u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+4\right) = \frac{9}{4} \approx 2{,}25 \geqslant \sqrt{2}$.)

Corrigé — Exercice 13

La relation fait intervenir deux rangs précédents : on prend $P(n)$: « $u_n = 8\times 2^n - 7\times 3^n$ **et** $u_{n+1} = 8\times 2^{n+1} - 7\times 3^{n+1}$ ». *Initialisation.* $8\times 1 - 7\times 1 = 1 = u_0$ et $8\times 2 - 7\times 3 = 16 - 21 = -5 = u_1$. *Hérédité.* Supposons $P(n)$. Alors $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5\left(8\times 2^{n+1} - 7\times 3^{n+1}\right) - 6\left(8\times 2^n - 7\times 3^n\right) = 8\times 2^n(10-6) - 7\times 3^n(15-6) = 8\times 4\times 2^n - 7\times 9\times 3^n = 8\times 2^{n+2} - 7\times 3^{n+2}$. Avec u_{n+1} déjà de la forme voulue, $P(n+1)$ est vraie. *Conclusion* : $u_n = 8\times 2^n - 7\times 3^n$ pour tout n.

Corrigé — Exercice 14

On pose $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ sur $[0;1]$: $f'(x) = \dfrac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$, donc f est croissante ; $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$.
$P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ». *Initialisation.* $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \frac{1}{2}$: $0 \leqslant 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$. *Hérédité.* Supposons $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Comme f est croissante sur $[0;1]$: $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$, soit $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$; et $0 \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$. *Conclusion* : vrai pour tout n. La suite est donc croissante et majorée par 1 : elle converge (vers 1, point fixe de f).

Chapitre 1. Fiche d'exercices n°2 — Corrigé

Limites de suites et récurrence

Série A ⋆ Automatismes

Corrigé — Exercice 1

a. $\frac{3}{n} \to 0$ donc $u_n \to 5$. **b.** $-2n^2 \to -\infty$ donc $u_n \to -\infty$. **c.** $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ donc $u_n \to 7$.
d. $0 < 0{,}6 < 1$ donc $0{,}6^n \to 0$. **e.** $2^n \to +\infty$ (raison > 1) donc $-3 \times 2^n \to -\infty$.

Corrigé — Exercice 2

a. $q > 1$: $\lim q^n = +\infty$. **b.** $-1 < q < 1$: $\lim q^n = 0$. **c.** $q = 1$: $q^n = 1$ pour tout n, limite 1.
d. $q \leqslant -1$: les termes $(-1{,}2)^n$ sont alternativement positifs et négatifs et $|q^n| = 1{,}2^n \to +\infty$: la suite n'a pas de limite.

Corrigé — Exercice 3

Pour $n_0 = 0$: $3^0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$; on a bien $1 \geqslant 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Corrigé — Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_n = 4n + 5$. Alors $u_{n+1} = u_n + 4 = 4n + 5 + 4 = 4(n+1) + 5$: $P(n+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

Corrigé — Exercice 5

Initialisation : $5 \times 2^0 - 3 = 2 = u_0$. *Hérédité :* si $u_n = 5 \times 2^n - 3$, alors $u_{n+1} = 2(5 \times 2^n - 3) + 3 = 5 \times 2^{n+1} - 6 + 3 = 5 \times 2^{n+1} - 3$. *Conclusion :* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 2^n - 3$.

Corrigé — Exercice 6

Somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{3}$: $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$. Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \to 0$, $\lim S_n = \dfrac{3}{2}$.

Corrigé — Exercice 7

Initialisation : pour $n = 1$, $1 = 1^2$. *Hérédité :* si $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$, alors $1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. *Conclusion :* la formule est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Corrigé — Exercice 8

$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ donne $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$. Les deux bornes tendent vers 2 : d'après le théorème des gendarmes, $\lim u_n = 2$.

Série B ⋆⋆ Entraînement

Corrigé — Exercice 9

Initialisation : $u_0 = 3 \in [1\,;3]$. *Hérédité :* si $1 \leqslant u_n \leqslant 3$, alors $2 \leqslant u_n + 1 \leqslant 4$ et $1 \leqslant \dfrac{u_n+1}{2} \leqslant 2$, donc $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. *Conclusion :* pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

Corrigé — Exercice 10

Initialisation : $5^0 - 1 = 0 = 4 \times 0$. *Hérédité :* si $5^n - 1 = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$), alors $5^{n+1} - 1 = 5\,(5^n - 1) + 4 = 20k + 4 = 4(5k+1)$, divisible par 4. *Conclusion :* $5^n - 1$ est divisible par 4 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé — Exercice 11

Quantité conjuguée : $\sqrt{n^2+3} - n = \dfrac{(n^2+3) - n^2}{\sqrt{n^2+3}+n} = \dfrac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}$. Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+3} - n\right) = 0$.

Corrigé — Exercice 12

a. $u_n = \dfrac{n^2\left(1 - \frac{4}{n}\right)}{n^2\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)} \to \dfrac{1}{3}$. **b.** $v_n = \dfrac{n\left(5 + \frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{5 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \to 0$. **c.** $w_n = \dfrac{n^3\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = n \times \dfrac{1 + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}} \to +\infty$.

Corrigé — Exercice 13

$\sin n \leqslant 1$ donc $u_n \geqslant n^2 - 3$, et $n^2 - 3 \to +\infty$: par comparaison, $\lim u_n = +\infty$.

Corrigé — Exercice 14

$|\cos n| \leqslant 1$ donc $-\dfrac{3}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{n+1}$, et $\dfrac{3}{n+1} \to 0$: d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

Corrigé — Exercice 15

$0{,}85^n \to 0$ donc $2 - 4 \times 0{,}85^n \to 2$. En factorisant par 4^n : $\dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n} = \dfrac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} \to \dfrac{1-0}{1+0} = 1$.

Corrigé — Exercice 16

a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = 0{,}75u_n + 2 - 8 = 0{,}75\,(u_n - 8) = 0{,}75v_n$: (v_n) est géométrique de raison 0,75 et de premier terme $v_0 = 4 - 8 = -4$.
b. $v_n = -4 \times 0{,}75^n$ donc $u_n = 8 - 4 \times 0{,}75^n$; comme $0{,}75^n \to 0$, $\lim u_n = 8$.
c. $8 - u_n < 0{,}1 \iff 4 \times 0{,}75^n < 0{,}1 \iff 0{,}75^n < 0{,}025$. Or $4 \times 0{,}75^{12} \approx 0{,}127$ et $4 \times 0{,}75^{13} \approx 0{,}095$: le plus petit entier est $n = 13$ (avec le logarithme : $n > \frac{\ln 0{,}025}{\ln 0{,}75} \approx 12{,}8$).

Série C ⋆⋆⋆ Applications

Corrigé — Exercice 17

a. Notons $f(x) = \sqrt{3x+4}$, croissante sur $\left[-\frac{4}{3}\,;+\infty\right[$. *Initialisation :* $u_1 = \sqrt{19} \approx 4{,}36$, donc $4 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 5$. *Hérédité :* si $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$, alors par croissance de f : $f(4) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(5)$, soit $4 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{19} \leqslant 5$. *Conclusion :* la propriété est vraie pour tout n.
b. (u_n) est décroissante et minorée par 4 : elle converge. $\ell = \sqrt{3\ell+4}$ donne $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, de racines -1 et 4 ; comme $\ell \geqslant 4$, $\ell = 4$.

Corrigé — Exercice 18

a. $v_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$: géométrique de raison $\frac{1}{4}$, $v_0 = -3$.
b. $u_n = 4 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$. **c.** $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$ donc $\lim u_n = 4$; $u_{n+1} - u_n = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$: (u_n) est croissante.
d. $4 - u_n < 10^{-3} \iff 3\left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-3} \iff 4^n > 3\,000$; $4^5 = 1\,024$ et $4^6 = 4\,096$: le plus petit rang est $n = 6$.

Corrigé — Exercice 19

$-2 \leqslant 2(-1)^n \leqslant 2$ donne $\dfrac{n-2}{2n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+2}{2n+1}$. Or $\dfrac{n \pm 2}{2n+1} = \dfrac{1 \pm \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \to \dfrac{1}{2}$: d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Corrigé — Exercice 20

a. Pour $n \geqslant 1$, $-\sqrt{n} \leqslant (-1)^n\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n}$, donc $\dfrac{3n-\sqrt{n}}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3n+\sqrt{n}}{n+2}$. Or $\dfrac{3n \pm \sqrt{n}}{n+2} = \dfrac{3 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{2}{n}} \to 3$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.
b. $2^{n-1} = \frac{1}{2}2^n$ et $5^{n-1} = \frac{1}{5}5^n$, $6^{n+1} = 6 \times 6^n$. En factorisant par les termes dominants : $v_n = \dfrac{3^n\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{6^n\left(6 - \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{6 - \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n}$. Le premier facteur tend vers 0 ($0 < \frac{1}{2} < 1$) et le second vers $\frac{1}{6}$ (car $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ et $\left(\frac{5}{6}\right)^n \to 0$) : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
c. Quantité conjuguée : $w_n = \dfrac{\left(n^2+5n\right) - n^2}{\sqrt{n^2+5n} + n} = \dfrac{5n}{\sqrt{n^2+5n} + n} = \dfrac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1} \to \dfrac{5}{1+1} = \dfrac{5}{2}$.
d. $a_n = \dfrac{n^2\left(2 + \frac{\sin n}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{3}{n} - 1\right)} = \dfrac{2 + \frac{\sin n}{n^2}}{\frac{3}{n} - 1}$. Comme $\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2} \to 0$, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers -1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -2$.
e. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$: $n^2 + 2 \leqslant n^2 + 2k \leqslant n^2 + 2n$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2k}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}$. En sommant ces n inégalités : $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$. Or $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \to 1$ et $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}}} \to 1$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$.

Corrigé — Exercice 21

a. *Initialisation :* $|u_0 - 3| = 3 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^0$. *Hérédité :* si $|u_n - 3| \leqslant 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$, alors $|u_{n+1} - 3| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 3| \leqslant \frac{2}{3} \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. *Conclusion :* l'inégalité est vraie pour tout n.
b. $0 \leqslant |u_n - 3| \leqslant 3\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, donc $|u_n - 3| \to 0$ (gendarmes) et $\lim u_n = 3$.

Corrigé — Exercice 22

a.

```
def seuil(S):
    u = 8
    n = 0
    while u <= S:
        u = 1.2*u - 1
        n = n + 1
    return n
```

b. $v_{n+1} = 1{,}2u_n - 1 - 5 = 1{,}2(u_n - 5) = 1{,}2v_n$: (v_n) est géométrique de raison 1,2, $v_0 = 3$, donc $u_n = 5 + 3 \times 1{,}2^n$.

c. $u_n > 100 \iff 1{,}2^n > \dfrac{95}{3} \approx 31{,}7$; $u_{18} \approx 84{,}9$ et $u_{19} \approx 100{,}8$: `seuil(100)` renvoie 19 (avec le logarithme : $n > \frac{\ln(95/3)}{\ln 1{,}2} \approx 18{,}9$).

Corrigé — Exercice 23

Soit $P(n)$: « $u_n = 2^n + 3^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$ ». *Initialisation :* $u_0 = 2 = 1 + 1$ et $u_1 = 5 = 2 + 3$. *Hérédité :* si $P(n)$ est vraie, alors $u_{n+2} = 5\left(2^{n+1} + 3^{n+1}\right) - 6\left(2^n + 3^n\right) = 2^n(10 - 6) + 3^n(15 - 6) = 4 \times 2^n + 9 \times 3^n = 2^{n+2} + 3^{n+2}$, donc $P(n+1)$ est vraie. *Conclusion :* $u_n = 2^n + 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé — Exercice 24

Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $4^n \geqslant 1 + 3n^2$. *Initialisation :* $4^1 = 4$ et $1 + 3 \times 1^2 = 4$: vraie. *Hérédité :* supposons $4^n \geqslant 1 + 3n^2$ pour un entier $n \geqslant 1$. En multipliant par 4 : $4^{n+1} \geqslant 4 + 12n^2$. Or $4 + 12n^2 - \left(1 + 3(n+1)^2\right) = 4 + 12n^2 - 3n^2 - 6n - 4 = 9n^2 - 6n = 3n(3n - 2) \geqslant 0$ pour $n \geqslant 1$, donc $4 + 12n^2 \geqslant 1 + 3(n+1)^2$ et $4^{n+1} \geqslant 1 + 3(n+1)^2$. *Conclusion :* la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \dfrac{5n}{4^n} \leqslant \dfrac{5n}{1 + 3n^2} = \dfrac{\frac{5}{n}}{\frac{1}{n^2} + 3} \to 0$, donc $\dfrac{5n}{4^n} \to 0$ (gendarmes). Alors $3^n - 4^n + 5n = 4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1 + \dfrac{5n}{4^n}\right]$; le crochet tend vers $0 - 1 + 0 = -1$ et $4^n \to +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (3^n - 4^n + 5n) = -\infty$.

Série D ⋆⋆⋆⋆ Modélisation et approfondissement

Corrigé — Exercice 25

a. *Initialisation :* $u_0 = 3 > 1$. *Hérédité :* si $u_n > 1$, alors $u_n + 2 > 0$ et $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4u_n - 1 - (u_n + 2)}{u_n + 2} = \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2} > 0$. *Conclusion :* $u_n > 1$ pour tout n.

b. $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} = \dfrac{(u_n - 1) + 3}{3(u_n - 1)} = \dfrac{1}{3} + v_n$: arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2}$.

c. $v_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{3} = \dfrac{2n + 3}{6}$, donc $u_n = 1 + \dfrac{6}{2n + 3}$ et $\lim u_n = 1$.

Corrigé — Exercice 26

1. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 4$. *Initialisation :* $u_0 = 2 \neq 4$. *Hérédité :* supposons $u_n \neq 4$ pour un entier n. Alors $u_{n+1} - 4 = \dfrac{7u_n - 16 - 4(u_n - 1)}{u_n - 1} = \dfrac{3(u_n - 4)}{u_n - 1}$, quotient non nul puisque $u_n - 4 \neq 0$: $u_{n+1} \neq 4$. *Conclusion :* la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.a. D'après le calcul précédent, $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1} - 4} = \dfrac{u_n - 1}{3(u_n - 4)} = \dfrac{(u_n - 4) + 3}{3(u_n - 4)} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{u_n - 4} = v_n + \dfrac{1}{3}$: (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2 - 4} = -\dfrac{1}{2}$.

2.b. $v_n = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{3} = \dfrac{2n-3}{6}$. Comme $2n-3 \neq 0$ pour tout entier n, $v_n \neq 0$ et $u_n = 4 + \dfrac{1}{v_n} = 4 + \dfrac{6}{2n-3}$. (Vérification : $u_1 = -2$, $u_2 = 10$, $u_3 = 6$, valeurs que l'on retrouve par la relation de récurrence. On constate aussi que $u_n \neq 1$, ce qui confirme que la suite est bien définie.)
2.c. $\dfrac{6}{2n-3} \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

3. Somme de $n+1$ termes d'une suite arithmétique : $S_n = (n+1) \times \dfrac{v_0 + v_n}{2} = (n+1) \times \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{2n-3}{6}}{2} = (n+1) \times \dfrac{2n-6}{12} = \dfrac{(n+1)(n-3)}{6}$. Puis $P_n = 3^{v_0+v_1+\cdots+v_n} = 3^{S_n} = 3^{\frac{(n+1)(n-3)}{6}}$. (Contrôle : $P_0 = 3^{v_0} = 3^{-1/2}$ et $\frac{(0+1)(0-3)}{6} = -\frac{1}{2}$ ✓.)

Corrigé — Exercice 27

a. Après 24 h il reste 60 % de la quantité, puis le patient prend 20 mg : $q_{n+1} = 0{,}6q_n + 20$.
b. $\ell = 0{,}6\ell + 20 \iff 0{,}4\ell = 20 \iff \ell = 50$. $q_{n+1} - 50 = 0{,}6q_n + 20 - 50 = 0{,}6\,(q_n - 50)$: $(q_n - 50)$ est géométrique de raison 0,6, de premier terme $q_0 - 50 = -30$.
c. $q_n = 50 - 30 \times 0{,}6^n$; $0{,}6^n \to 0$ donc $\lim q_n = 50$: la quantité augmente chaque jour mais se stabilise, sans jamais le dépasser, vers un plateau de 50 mg.
d. $q_n > 49 \iff 30 \times 0{,}6^n < 1 \iff 0{,}6^n < \dfrac{1}{30}$; $q_6 \approx 48{,}6$ et $q_7 \approx 49{,}2$: à partir du jour $n = 7$ (huitième prise).

Corrigé — Exercice 28

a. $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.
b. *Initialisation :* $u_0 = 1 = 2 - \frac{1}{1}$. *Hérédité :* si $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$, alors $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = 2 - \dfrac{1}{n+2}$. *Conclusion :* $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout n.
c. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: croissante ; $u_n < 2$: majorée par 2 ; $\dfrac{1}{n+1} \to 0$ donc $\lim u_n = 2$.

Corrigé — Exercice 29

1. Montrons par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *Initialisation :* $u_0 = 2$. *Hérédité :* si $0 \leqslant u_n \leqslant 3$, alors $3 \leqslant 2u_n + 3 \leqslant 9$ et, par croissance de la racine carrée, $\sqrt{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$, donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. *Conclusion :* la suite est minorée par 0 et majorée par 3.
2. $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n+3} - u_n = \dfrac{(2u_n+3) - u_n^2}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}$ (le dénominateur est strictement positif car $\sqrt{2u_n+3} \geqslant \sqrt{3}$ et $u_n \geqslant 0$). Le numérateur vaut $-u_n^2 + 2u_n + 3 = (3-u_n)(u_n+1) \geqslant 0$ puisque $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. Donc $u_{n+1} \geqslant u_n$: (u_n) est croissante.
3.a. $3 - u_{n+1} = 3 - \sqrt{2u_n+3} = \dfrac{9 - (2u_n+3)}{3 + \sqrt{2u_n+3}} = \dfrac{2\,(3-u_n)}{3+\sqrt{2u_n+3}}$. Comme $u_n \geqslant 0$, $\sqrt{2u_n+3} \geqslant \sqrt{3} > 1$, donc $3 + \sqrt{2u_n+3} > 4$; avec $3 - u_n \geqslant 0$, il vient $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2\,(3-u_n)}{4} = \dfrac{1}{2}\,(3-u_n)$.
3.b. Par récurrence : $3 - u_0 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$; si $3 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$, alors $3 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\,(3-u_n) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Ainsi, pour tout n, $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (la minoration vient de la question 1). Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, le théorème des gendarmes donne $3 - u_n \to 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$. (On peut aussi remarquer que (u_n), croissante et majorée, converge vers un réel ℓ vérifiant $\ell = \sqrt{2\ell+3}$, d'où $\ell = 3$.)

Corrigé — Exercice 30

a. $f(\alpha_{n+1}) = n+1 > n = f(\alpha_n)$. Si l'on avait $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$, la croissance de f donnerait $f(\alpha_{n+1}) \leqslant f(\alpha_n)$, ce qui est faux : donc $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ et (α_n) est strictement croissante.
b. Supposons (α_n) majorée par un réel $M > 0$. Pour tout n, $n = \alpha_n^3 + \alpha_n \leqslant M^3 + M$, ce qui est impossible

puisque n prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. Donc (α_n) n'est pas majorée ; croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.

Série E ⋆⋆⋆⋆⋆ Défi

Corrigé — Exercice 31

1. $u_2 = \frac{1}{3}\times\frac{4}{3}+\frac{2-1}{3\times1\times2} = \frac{4}{9}+\frac{1}{6} = \frac{11}{18}$; $u_3 = \frac{1}{3}\times\frac{11}{18}+\frac{4-1}{3\times2\times3} = \frac{11}{54}+\frac{1}{6} = \frac{20}{54} = \frac{10}{27}$. Avec le dénominateur 54 : $u_1 = \frac{72}{54} > u_2 = \frac{33}{54} > u_3 = \frac{20}{54}$.

2.a. En écrivant la relation aux rangs $n+1$ et n puis en soustrayant : $u_{n+2}-u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n) + \frac{2n+1}{3(n+1)(n+2)} - \frac{2n-1}{3n(n+1)}$, et $\frac{2n+1}{3(n+1)(n+2)} - \frac{2n-1}{3n(n+1)} = \frac{n(2n+1)-(2n-1)(n+2)}{3n(n+1)(n+2)} = \frac{2n^2+n-\left(2n^2+3n-2\right)}{3n(n+1)(n+2)} = \frac{2-2n}{3n(n+1)(n+2)} = -\frac{2(n-1)}{3n(n+1)(n+2)}$.

2.b. Montrons par récurrence que $u_{n+1}-u_n < 0$ pour tout $n \geqslant 1$. *Initialisation :* $u_2-u_1 = \frac{11}{18}-\frac{24}{18} = -\frac{13}{18} < 0$. *Hérédité :* si $u_{n+1}-u_n<0$, alors d'après 2.a., $u_{n+2}-u_{n+1}$ est la somme de $\frac{1}{3}(u_{n+1}-u_n)<0$ et de $-\frac{2(n-1)}{3n(n+1)(n+2)} \leqslant 0$ (car $n\geqslant1$) : il est strictement négatif. *Conclusion :* (u_n) est strictement décroissante.

3.a. $v_{n+1} = u_{n+1}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{3}u_n+\frac{2n-1}{3n(n+1)}-\frac{3n}{3n(n+1)} = \frac{1}{3}u_n+\frac{-(n+1)}{3n(n+1)} = \frac{1}{3}u_n-\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\left(u_n-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = \frac{4}{3}-1 = \frac{1}{3}$.

3.b. $v_n = v_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, donc $u_n = v_n+\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{n}$ (on retrouve $u_2 = \frac{1}{9}+\frac{1}{2} = \frac{11}{18}$ ✓).

3.c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ et $\frac{1}{n}\to0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Corrigé — Exercice 32

a. Par récurrence, $u_n>0$: $u_0 = 2>0$ et si $u_n>0$ alors $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right)>0$. Puis $u_{n+1}-\sqrt{2} = \frac{u_n^2+2-2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2u_n} \geqslant 0$. Ainsi $u_{n+1}\geqslant\sqrt{2}$ pour tout $n\geqslant0$, et $u_0 = 2\geqslant\sqrt{2}$: $u_n\geqslant\sqrt{2}$ pour tout n.

b. $u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n}-u_n\right) = \frac{2-u_n^2}{2u_n} \leqslant 0$ car $u_n\geqslant\sqrt{2}$: (u_n) est décroissante ; minorée par $\sqrt{2}$, elle converge.

c. $u_{n+1}-\sqrt{2} = \left(u_n-\sqrt{2}\right)\times\frac{u_n-\sqrt{2}}{2u_n}$ et $0\leqslant\frac{u_n-\sqrt{2}}{2u_n} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2u_n}<\frac{1}{2}$, d'où $u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{2}\right)$. Par récurrence : $u_0-\sqrt{2} = 2-\sqrt{2}$ et, si $0\leqslant u_n-\sqrt{2}\leqslant\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, alors $0\leqslant u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(2-\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n\to0$, le théorème des gendarmes donne $\lim u_n = \sqrt{2}$.

Corrigé — Exercice 33

a. $u_{n+1}-u_n = u_n^2\geqslant0$: (u_n) est croissante, donc $u_n\geqslant u_0 = \frac{1}{2}$ pour tout n.

b. Si $u_n\to\ell$, alors $u_{n+1}\to\ell$ et $u_n+u_n^2\to\ell+\ell^2$; par unicité de la limite, $\ell = \ell+\ell^2$, soit $\ell^2=0$ et $\ell=0$. Mais $u_n\geqslant\frac{1}{2}$ pour tout n impose $\ell\geqslant\frac{1}{2}$: contradiction.

c. (u_n) ne converge pas ; étant croissante, elle n'est pas majorée (sinon elle convergerait), donc $\lim u_n = +\infty$.

Série F ⋆⋆ Algorithmes de seuil en Python

Corrigé — Exercice 34

1. $u_1 = 3{,}5$, $u_2 = 4{,}25$, $u_3 = 5{,}375$. **2.** $v_{n+1} = 1{,}5u_n - 1 - 2 = 1{,}5\,(u_n - 2) = 1{,}5v_n$: géométrique de raison 1,5, $v_0 = 1$, donc $v_n = 1{,}5^n$ et $u_n = 2 + 1{,}5^n$.
3. $1{,}5^n \to +\infty$ donc $\lim u_n = +\infty$; $u_{n+1} - u_n = 1{,}5^{n+1} - 1{,}5^n = 0{,}5 \times 1{,}5^n > 0$: croissante.
4.

```
def seuil(S):
    u = 3
    n = 0
    while u <= S:
        u = 1.5*u - 1
        n = n + 1
    return n
```

5. `seuil(50)` renvoie 10. Par le calcul : $u_n > 50 \iff 1{,}5^n > 48 \iff n \ln 1{,}5 > \ln 48 \iff n > \dfrac{\ln 48}{\ln 1{,}5} \approx 9{,}55$, donc $n = 10$ ($u_9 \approx 40{,}4$, $u_{10} \approx 59{,}7$).
6. La suite tend vers $+\infty$: pour tout réel S, il existe un rang à partir duquel $u_n > S$, la condition `u <= S` finit donc par être fausse et la boucle s'arrête.

Corrigé — Exercice 35

1. $\ell = 0{,}6\ell + 2{,}4 \iff 0{,}4\ell = 2{,}4 \iff \ell = 6$. $u_{n+1} - 6 = 0{,}6\,(u_n - 6)$: $(u_n - 6)$ est géométrique de raison 0,6 et de premier terme 4, donc $u_n = 6 + 4 \times 0{,}6^n$ et $\lim u_n = 6$.
2. La fonction calcule les termes successifs tant que $|u_n - 6| \geqslant e$; elle renvoie le plus petit entier n tel que $|u_n - 6| < e$, c'est-à-dire le rang à partir duquel u_n est à moins de e de sa limite.
3. $|u_n - 6| = 4 \times 0{,}6^n < 0{,}001 \iff 0{,}6^n < 0{,}00025$; $4 \times 0{,}6^{16} \approx 0{,}00113$ et $4 \times 0{,}6^{17} \approx 0{,}00068$: `rang(0.001)` renvoie 17.
4. $4 \times 0{,}6^n \to 0$: pour tout $e > 0$, il existe un rang à partir duquel $4 \times 0{,}6^n < e$, donc la condition de la boucle devient fausse et celle-ci s'arrête.
5. Il suffit de remplacer la dernière ligne par `return n, u` (la fonction renvoie alors le couple $(n\,;u_n)$).

Chapitre 1. Sujets du Bac — Corrigé

Suites numériques

Corrigé — Exercice A

1. $u_1 = 4 - \dfrac{4}{4} = 3$: 3 000 perches-soleil au 1er janvier 2026.
2.a. h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $h'(x) = \dfrac{4}{x^2} > 0$: h est strictement croissante.
2.b. *Initialisation :* $u_1 = 3$ et $u_0 = 4$: $2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant 4$. *Hérédité :* si $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$, la croissance de h donne $h(2) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(u_n) \leqslant h(4)$, soit $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 \leqslant 4$. *Conclusion :* pour tout n, $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.
2.c. (u_n) est décroissante et minorée par 2 : d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.
2.d. h étant continue, ℓ vérifie $\ell = 4 - \dfrac{4}{\ell}$, soit $\ell^2 - 4\ell + 4 = 0$, $(\ell - 2)^2 = 0$: $\ell = 2$.
2.e. Non : la population tend vers 2 000 individus, elle diminue mais ne disparaît pas.
3.a. Condition de poursuite `while u >= s :`, puis `u = 4 - 4/u` et `n = n + 1`.
3.b. On remarque que $u_n = 2 + \dfrac{2}{n+1}$ (vérifié par récurrence : $4 - \dfrac{4}{2 + \frac{2}{n+1}} = 4 - \dfrac{4(n+1)}{2n+4} = 4 - \dfrac{2(n+1)}{n+2} = \dfrac{2n+6}{n+2} = 2 + \dfrac{2}{n+2}$). Ainsi $u_n < 2{,}2 \iff \dfrac{2}{n+1} < 0{,}2 \iff n + 1 > 10$:

`population(2.2)` renvoie 10. C'est en 2035 que la population passe pour la première fois sous 2 200 perches-soleil.

Corrigé — Exercice B

Partie A. 1. $u_1 = \dfrac{30}{2} + 10 = 25$, $u_2 = \dfrac{25}{2} + 10 = 22{,}5$. **2.** $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 10 - 20 = \dfrac{1}{2}(u_n - 20) = \dfrac{1}{2}v_n$: géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = 10$. **3.** $v_n = 10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **4.** $u_n = v_n + 20 = 20 + 10\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
5. $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ et $\lim u_n = 20$.

Partie B. 1. $w_1 = \dfrac{1}{2} \times 45 + \dfrac{1}{2} \times 30 + 7 = 22{,}5 + 15 + 7 = 44{,}5$.
2. Dans la boucle, `U` est mis à jour avant d'être utilisé pour calculer `W` : la fonction calcule $\frac{1}{2}w_{i-1} + \frac{1}{2}u_i + 7$ au lieu de $\frac{1}{2}w_{i-1} + \frac{1}{2}u_{i-1} + 7$ (ainsi `suite(1)` renvoie $\frac{45}{2} + \frac{25}{2} + 7 = 42$ au lieu de 44,5). Il suffit d'échanger les deux lignes : calculer d'abord `W = W / 2 + U / 2 + 7`, puis `U = U / 2 + 10`.
3.a. *Initialisation :* $10 \times 0 \times 1 + 11 \times 1 + 34 = 45 = w_0$. *Hérédité :* si $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$, alors, avec $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$: $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n + \dfrac{1}{2}u_n + 7 = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7 = 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$. *Conclusion :* la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3.b. $\dfrac{10}{n} \to 0$, donc par le théorème des gendarmes $10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$; comme $11\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, la suite (w_n) converge vers 34.

Corrigé — Exercice C

Partie A. 1. $u_1 = 6 \times 0{,}93 = 5{,}58$: 5 580 individus. **2.** $u_n = 6 \times 0{,}93^n$. **3.** $0 < 0{,}93 < 1$ donc $\lim u_n = 0$: dans le milieu A, la population finit par disparaître.
Partie B. 1. $v_1 = -0{,}05 \times 36 + 1{,}1 \times 6 = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8$: 4 800 individus.
2. $f'(x) = -0{,}1x + 1{,}1 \geqslant 0 \iff x \leqslant 11$: f est croissante sur $[0\,;11]$.
3. *Initialisation :* $v_1 = 4{,}8$ et $v_0 = 6$: $2 \leqslant 4{,}8 \leqslant 6 \leqslant 6$. *Hérédité :* si $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$, ces nombres sont dans $[0\,;11]$ où f est croissante, donc $f(2) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \leqslant f(6)$, soit $2 \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 4{,}8 \leqslant 6$ (car $f(2) = -0{,}2 + 2{,}2 = 2$ et $f(6) = 4{,}8$). *Conclusion :* pour tout n, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.
4. (v_n) est décroissante et minorée par 2 : elle converge vers un réel $\ell \geqslant 2$.
5.a. f est continue, donc $\ell = f(\ell)$: $-0{,}05\ell^2 + 0{,}1\ell = 0 \iff \ell(-0{,}05\ell + 0{,}1) = 0 \iff \ell = 0$ ou $\ell = 2$; comme $\ell \geqslant 2$, $\ell = 2$. **5.b.** Dans le milieu B, la population diminue et se stabilise vers 2 000 individus.
Partie C. 1. $6 \times 0{,}93^n < 3 \iff 0{,}93^n < 0{,}5 \iff n \ln 0{,}93 < \ln 0{,}5 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}93} \approx 9{,}55$ (on divise par $\ln 0{,}93 < 0$) : à partir de $n = 10$, soit en 2035.
2. Calculatrice : $v_5 \approx 3{,}145$ et $v_6 \approx 2{,}965$: à partir de $n = 6$, soit en 2031.
3. $v_n \geqslant 2$ pour tout n tandis que $u_n \to 0$: il existe un rang à partir duquel $u_n < 2 \leqslant v_n$ (dès que $6 \times 0{,}93^n < 2$, soit $n \geqslant 16$), donc la population de B dépasse celle de A à partir d'une certaine année.
4.a. `while v <= u :,u = 0.93*u, v = -0.05*v*v + 1.1*v`. **4.b.** La boucle s'arrête pour $n = 13$ ($u_{13} \approx 2{,}336 < v_{13} \approx 2{,}358$ alors que $u_{12} \approx 2{,}512 > v_{12} \approx 2{,}406$) : le programme affiche 2038.